Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Aufgabenblatt 11

Kurzfragen

- Was besagt der **Satz von Euler**?
- Was ist eine **(universelle) Algebra**?
- Was ist ein **(Algebra-)Homomorphismus**?

Aufgabe 11.1 *(Satz von Euler)* *(3+1=4 Punkte)*

(a) Seien $a, n \in \mathbb{Z}, n \geq 2$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$. Weiter seien $r_1, r_2 \in \mathbb{N}_0$ mit $r_1 \equiv r_2 \pmod{\varphi(n)}$ gegeben. Beweisen Sie, dass dann $a^{r_1} \bmod n = a^{r_2} \bmod n$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $8^{1286} \bmod 13$.

Aufgabe 11.2 *(Carmichael-Zahlen & Kleiner Satz von Fermat)* *(1+3=4 Punkte)*

Erinnern Sie sich, dass eine zusammengesetzte Zahl $n \in \mathbb{N}$ genau dann eine Carmichael-Zahl ist, wenn für alle $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ gilt, dass $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ ist.

(a) Beweisen Sie, dass jede Carmichael-Zahl ungerade ist.

(b) Beweisen Sie, dass $n = 1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ eine Carmichael-Zahl ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich bei (b) zunächst, dass für $a \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ gilt:

$$\begin{aligned} a^{n-1} &\equiv 1 \pmod{7} \\ a^{n-1} &\equiv 1 \pmod{13} \\ a^{n-1} &\equiv 1 \pmod{19}. \end{aligned}$$

Aufgabe 11.3 *(Unteralgebren von universellen Algebren)* *(3+1=4 Punkte)*

(a) Sei $\mathcal{A} = (S, f_1, \ldots, f_t)$ eine Algebra und seien $S_1, \ldots, S_r \subseteq S$ Teilmengen, die Unteralgebren von $\mathcal{A}$ erzeugen. Beweisen Sie, dass dann auch $\bigcap_{j=1}^{r} S_j$ eine Unteralgebra von $\mathcal{A}$ erzeugt.

(b) Sei $\mathcal{B} = (\mathbb{N}_0, +)$. Geben Sie zwei Teilmengen $X, Y \subseteq \mathbb{N}_0$ an, die Unteralgebren von $\mathcal{B}$ erzeugen, so dass $X \cup Y$ keine Unteralgebra von $\mathcal{B}$ erzeugt.

Bitte wenden.

Aufgabe 11.4 *(Morphismen von universellen Algebren)* *(1+1+1+1=4 Punkte)*

Zeigen oder widerlegen Sie, dass es sich bei den folgenden Abbildungen um Homomorphismen von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ handelt:

(a) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}_0, +)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{N}_0, \cdot)$, $f_1 \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ n \mapsto 2^n$

(b) $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{Z}, +)$, $f_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ x \mapsto x + 1$

(c) $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, +)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, +)$, $f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$

(d) $\mathcal{A} = (\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}), \circ)$, $\mathcal{B} = (\mathrm{Abb}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}), \circ)$, $f_4 \colon \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N}) \to \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}),\ f \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$

Aufgabe 11.5 - Bonusaufgabe *(Bunt gemischt)* *(1+1+1+1+1+1=6 Bonuspunkte)*

Kreuzen Sie jeweils **alle** zutreffenden Antworten an. Für eine **vollständig** korrekt beantwortete Frage gibt es jeweils 1 Bonuspunkt.

(a) Die Relation $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |a - b| < 1\}$ ist:

- ☐ reflexiv
- ☐ symmetrisch
- ☐ transitiv

(b) Seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f_1(n) = O(g_1(n))$ und $f_2(n) = O(g_2(n))$, so gilt:

- ☐ $(f_1 + f_2)(n) = O\left(|g_1(n)| + |g_2(n)|\right)$
- ☐ $(f_1 + f_2)(n) = O\left(\max\{|g_1(n)|, |g_2(n)|\}\right)$
- ☐ $(f_1 + f_2)(n) = O\left(\min\{|g_1(n)|, |g_2(n)|\}\right)$

(c) Seien A und B endliche Mengen mit $|A| = m$ und $|B| = n$ und $m > n$. Dann gilt:

- ☐ $|\{f \in \mathrm{Abb}(A, B) : f \text{ surjektiv}\}| = n! S(m, n)$
- ☐ $|\{f \in \mathrm{Abb}(A, B) : f \text{ surjektiv}\}| = m! S(n, m)$
- ☐ $|\{f \in \mathrm{Abb}(A, B) : f \text{ injektiv}\}| = \frac{n!}{(m-n)!}$

(d) Sei eine lineare Differenzengleichung gegeben durch $f_0 = 7$ und $f_n = 3f_{n-1} + 1$. Dann gilt:

- ☐ Es gibt $j \in \mathbb{N}$ mit $f_j = 217$.
- ☐ Es gilt $f_2 = 67$.
- ☐ Das charakteristische Polynom der zugehörigen homogenen linearen Differenzengleichung hat Grad 2.

(e) Es gilt:

- ☐ Das multiplikative Inverse von 311 in $\mathbb{Z}_7$ ist 5.
- ☐ Es gibt $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $9 = x \cdot 311 + y \cdot 7$.
- ☐ Es gibt $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $11 = x \cdot 311 + y \cdot 7$.

(f) Betrachten Sie das folgende System linearer Kongruenzen:

$$x \equiv 4 \pmod 5$$
$$x \equiv 5 \pmod 7.$$

Dann gilt:

- ☐ Es gibt eine eindeutige Lösung des Systems in $\mathbb{Z}_{35}$.
- ☐ Es gibt unendlich viele Lösungen des Systems in $\mathbb{Z}$.
- ☐ 3904 ist eine Lösung des Systems.

Abgabe der Hausaufgaben bis Donnerstag, den **24. Januar 2019, 11:00 Uhr,**
in die gekennzeichneten Briefkästen hinter Raum PK 4.3.
Sie benötigen mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte für die Studienleistung.