Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Aufgabenblatt 8

Kurzfragen

- Was ist eine **rekursive Folge**?
- Was sind die **Fibonacci-Zahlen**?
- Was ist eine **homogene lineare Differenzengleichung der Ordnung r mit konstanten Koeffizienten**?

Aufgabe 8.1 *(Collatz-Vermutung)* *(2+1+2=5 Punkte)*

Betrachten Sie für $c \in \mathbb{N}$ die rekursive Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch den Anfangswert $a_1 = c$ und

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{falls } a_n \text{ gerade,} \\ 3a_n + 1, & \text{falls } a_n \text{ ungerade} \end{cases} \quad (n \geq 1).$$

(a) Geben Sie für $c \in \{1, 3, 24, 336\}$ jeweils die ersten 12 Folgeglieder der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

(b) Bestimmen Sie eine unendliche Menge $S \subseteq \mathbb{N}$ von Anfangswerten, so dass für jedes $c \in S$ ein $j \in \mathbb{N}$ existiert mit $a_j = 1$.

(c) Bestimmen Sie alle Anfangswerte $c \in \mathbb{N}$, so dass $a_6 = 1$ gilt.

Aufgabe 8.2 *(Fibonacci-Zahlen)* *(2+2=4 Punkte)*

Seien F_n die Fibonacci-Zahlen. Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ gilt: $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$.

Aufgabe 8.3 *(Lineare Differenzengleichungen)* *(2+2=4 Punkte)*

Sei die folgende homogene lineare Differenzengleichung gegeben:

$$(*) \quad f_n = -f_{n-1} + 14f_{n-2} + 24f_{n-3} \quad (n \geq 4).$$

(a) Zeigen Sie, dass die allgemeine Lösung von $(*)$ gegeben ist durch $f_n = c_1 \cdot (-3)^n + c_2 \cdot (-2)^n + c_3 \cdot 4^n$ mit Konstanten c_1, c_2, c_3.

(b) Bestimmen Sie f_n explizit für die Anfangswerte $f_1 = 2, f_2 = 56, f_3 = 44$.

Aufgabe 8.4 *(Lineare Differenzengleichungen II)* *(3 Punkte)*

Beweisen Sie Satz 2.12 aus der Vorlesung, d.h. beweisen Sie folgende Aussage: Sei

$$f_0 = c,\ f_n = af_{n-1} + b \quad (n \geq 1)$$

mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ eine inhomogene, lineare Differenzengleichung erster Ordnung. Dann ist die Lösung dieser Gleichung gegeben durch

$$f_n = \begin{cases} a^n c + \left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) b, & \text{falls } a \neq 1 \\ c + nb, & \text{falls } a = 1 \end{cases}.$$

(**Hinweis:** Zeigen Sie zunächst per vollständiger Induktion, dass $f_n = a^n c + (a^0 + \ldots + a^{n-1})b$ gilt und unterscheiden Sie dann die Fälle $a \neq 1$ und $a = 1$. Im ersten Fall können Sie das Resultat von Aufgabe 5.1 (b) verwenden.)

Abgabe der Hausaufgaben bis Donnerstag, den **20. Dezember 2018, 11:00 Uhr,**
in die gekennzeichneten Briefkästen hinter Raum PK 4.3.
Sie benötigen mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte für die Studienleistung.