Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Aufgabenblatt 7

Kurzfragen

- Was besagt das **Prinzip der Inklusion und Exklusion**?
- Was ist ein n-**Derangement**?
- Was sind die **Rencontre-Zahlen**?

Aufgabe 7.1 *(Inklusion-Exklusion und Verwandtes)* *(2+2+4+4=12 Punkte)*

Geben Sie begründete Antworten auf die folgenden Fragen:

(a) Von 18 Studierenden im Raum studieren 7 Physik, 10 Informatik und 10 Mathematik. Außerdem studieren

- 3 von ihnen Physik und Informatik,
- 4 Physik und Mathematik, und
- 5 Informatik und Mathematik.
- Ein Studierender braucht keinen Schlaf und studiert alle 3 Fächer.

Wieviele Studierende im Raum belegen keines der drei Fächer?

(b) Eine Umfrage unter 100 Personen hat ergeben:

- 8 besitzen ein Motorrad
- 20 besitzen ein Auto
- 48 besitzen ein Fahrrad
- 38 besitzen weder ein Motorrad, noch ein Auto, noch ein Fahrrad.
- Keine der Personen, die ein Auto besitzen, besitzt auch ein Motorrad.

Wie viele Personen besitzen ein Fahrrad und zusätzlich noch **entweder** ein Auto oder Motorrad?

(c) Seien A, B, C Mengen mit $|A| = 100$, $|B| = 50$ und $|C| = 48$. Außerdem gelte:

- Die Anzahl der Elemente, welche in genau einer der Mengen enthalten sind, ist doppelt so groß wie die Anzahl der Elemente, die im Durchschnitt von genau zwei der Mengen enthalten sind.
- Die Anzahl der Elemente, welche in genau einer der Mengen enthalten sind, ist dreimal so groß wie die Anzahl der Elemente, die im Durchschnitt aller Mengen enthalten sind.

Wieviel Elemente sind in $A \cap B \cap C$ enthalten?

Bitte wenden.

(d) Bei der Internationalen Informatik-Olympiade wurde drei Probleme A, B und C gestellt. Folgendes Ergebnis wurde bei der Auswertung beobachtet:

- 25 Teilnehmer haben mindestens eines der Probleme gelöst.
- Von den Teilnehmern, die Problem A nicht gelöst haben, haben doppelt soviele Teilnehmer Problem B gelöst, wie Teilnehmer Problem C gelöst haben.
- Die Anzahl der Teilnehmer, die nur Problem A gelöst haben, ist um eins höher als die Anzahl der Teilnehmer, die Problem A und mindestens ein weiteres Problem gelöst haben.
- Von den Teilnehmern, die nur ein Problem gelöst haben, hat die Hälfte Problem A nicht gelöst.

Wieviele Teilnehmer haben **nur** Problem B gelöst?

(**Hinweis:** Bei der Lösung von Aufgabenteil (c) und (d) werden Ihnen möglicherweise lineare Gleichungssysteme begegnen, aus denen Sie die Antwort dann ableiten können.)

Aufgabe 7.2 *(Rencontre-Zahlen)* *(1+1=2 Punkte)*

Sei $P = (p_1, \ldots, p_n)$ eine Permutation von $[n]$. Wir sagen eine Zahl i ist ein **Fixpunkt** von p, wenn $p_i = i$ gilt.

(a) Bestimmen Sie begründet die Anzahl der Permutationen von $[6]$ mit höchstens drei Fixpunkten.

(b) Bestimmen Sie begründet die Anzahl der 9-Derangements von $[9]$, so dass sich jede gerade Zahl an einer geraden Position befindet.

Aufgabe 7.3 *(Rencontre-Zahlen II)* *(2 Punkte)*

Benutzen Sie die folgende (hier nicht bewiesene, aber relativ leicht einzusehende) Beziehung für die Rencontre-Zahlen:

$$D_n = (n-1) \cdot (D_{n-1} + D_{n-2}) \quad (*)$$

um einen alternativen Beweis von Satz 2.7 zu führen. Zeigen Sie also mit Hilfe von $(*)$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$D_n = n! \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r!}$$

(**Hinweis:** Benutzen Sie dabei natürlich nicht Satz 2.7 oder Korollar 2.2. Es ist $D_0 = 1$ und $D_1 = 0$. Beachten Sie, dass $(*)$ wegen des Faktors $(n-1)$ auch für $n = 1$ gültig ist, egal wie wir D_{-1} definieren würden. Betrachten Sie dann zunächst die Zahlen

$$A_n = D_n - nD_{n-1} \quad (**)$$

und zeigen, dass $A_n = (-1)^n$ gilt. Teilen Sie dann beide Seiten von $(**)$ durch $n!$ und schließen Sie daraus auf die Behauptung.)

Abgabe der Hausaufgaben bis Donnerstag, den **13. Dezember 2018, 11:00 Uhr,**
in die gekennzeichneten Briefkästen hinter Raum PK 4.3.
Sie benötigen mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte für die Studienleistung.