Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Aufgabenblatt 6

Kurzfragen

- Was besagt das Schubfachprinzip?
- Wie sind die Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ definiert?
- Was ist die Aussage des binomischen Lehrsatzes?
- Was sind k-Permutationen, k-Variationen und k-Kombinationen (mit Wiederholung)?

Aufgabe 6.1 *(Schubfachprinzip)* *(2+2=4 Punkte)*

Beweisen Sie folgende Aussagen mit Hilfe des Schubfachprinzips:

(a) Sei $M = \{1, \ldots, 200\}$. Weiter sei $S \subseteq M$ mit $|S| = 101$. Dann gibt es in S zwei verschiedene Zahlen a und b, so dass $a \mid b$ gilt (d.h. a ist ein Teiler von b).

(b) Sei $M = \{1, 2, \ldots, 14\}$. Weiter sei $S \subseteq M$ mit $|S| = 6$. Dann gibt es zwei verschiedene echte, nichtleere Teilmengen A und B von S, d.h. also $\emptyset \neq A \subsetneq S$ und $\emptyset \neq B \subsetneq S$ mit $A \neq B$, so dass die Summe der Elemente in A gleich der Summe der Elemente in B ist.

Aufgabe 6.2 *(Kombinatorik)* *(1+1+1+1=4 Punkte)*

Bestimmen Sie, natürlich mit Begründung, die folgenden Anzahlen:

(a) Die Anzahl der ungeraden, 4-stelligen natürlichen Zahlen kleiner als 4000 mit verschiedenen Ziffern zwischen 1 und 9.

(b) Die Anzahl der 4-stelligen natürlichen Zahlen mit Ziffern zwischen 1 und 9, bei denen jede Ziffer mindestens genau so groß ist wie die vorherige.

(c) Die Anzahl der Möglichkeiten 5 Wombats und 10 Schnabeligel nebeneinander in eine Reihe zu setzen, so dass keine zwei Wombats direkt nebeneinander sitzen.

(d) Die Anzahl der positiven, ganzzahligen Lösungen von $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, d.h. die Anzahl der Quadrupel $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}$, welche die Gleichung erfüllen.

Aufgabe 6.3 *(Binomischer Lehrsatz)* *(2 Punkte)*

Beweisen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Bitte wenden.

Aufgabe 6.4 *(Binomialkoeffizienten)* *(1+1+1+3=6 Punkte)*

Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq k \leq n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen **ohne** den binomischen Lehrsatz zu verwenden:

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(b) $\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}$

(c) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

(d) Gibt es $1 \leq r \leq n-1$ mit $\binom{n}{r} - \binom{n}{r-1} = \binom{n}{r+1} - \binom{n}{r}$, dann ist $n + 2 = m^2$ für ein $m \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 6.5 - Bonusaufgabe *(Fleißiger Zauberer)* *(4 Bonuspunkte)*

Der Zauberlehrling H.P. hat noch 11 Wochen, d.h. 77 Tage, bis zur Prüfung im Fach „Verteidigung gegen die dunklen Künste“. Der „Riddikulus-Zauber“ bereitet ihm besondere Probleme. Daher beschließt er diesen jeden Tag mindestens einmal zu üben, jedoch höchstens 12 Mal in einer Woche, um seine Kräfte einzuteilen. Zeigen Sie, dass es einen Zeitraum aufeinanderfolgender Tage gibt, an denen H.P. den Zauber zusammen genau 21 Mal übt.

(**Hinweis:** Sei dazu a_1 die Anzahl der Übungen am ersten Tag, a_2 die Gesamtzahl der Übungen an Tag 1 und 2, und allgemein a_i, $i \in \{1, \ldots, 77\}$ die Gesamtzahl der Übungen an den Tagen 1 bis i. Betrachten Sie die Zahlen a_i und $a_i + 21$ und verwenden Sie das Schubfachprinzip.)

Abgabe der Hausaufgaben bis Donnerstag, den **6. Dezember 2018, 11:00 Uhr,**
in die gekennzeichneten Briefkästen hinter Raum PK 4.3.
Sie benötigen mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte für die Studienleistung.