Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Aufgabenblatt 5

Kurzfragen

- Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Wie sind $O(g(n))$, $\Omega(g(n))$, $\Theta(g(n))$, $o(g(n))$ und $\omega(g(n))$ definiert?

Definition

Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Dann definieren wir die **punktweise Addition** der Funktionen als die Funktion

$$f + g : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x).$$

Aufgabe 5.1 *(Vollständige Induktion II)* *(2+2+2=6 Punkte)*

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$

(b) Sei $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Aufgabe 5.2 *(Landau-Symbole I)* *(1+1+2=4 Punkte)*

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Für die Aufgabenteile a) & b) betrachten wir Logarithmen als Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Sie dürfen, falls nötig, die üblichen Rechenregeln für Logarithmen verwenden.

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $a > b$. Dann gilt $\log_a(n) = O(\log_b(n))$.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $a > b$. Dann gilt $\log_b(n) = O(\log_a(n))$.

(c) Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ n \to \sum_{k=1}^{n} k^2$. Dann gilt $f(n) = \Theta(n^3)$. (**Hinweis:** Benutzen Sie Teil (c) aus Aufgabe 5.1).

Aufgabe 5.3 *(Landau-Symbole II)* *(1+1+1=3 Punkte)*

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dann gilt $o(g(n)) \subseteq O(g(n))$.

(b) Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, so dass $o(g(n)) \neq O(g(n))$ gilt.

(c) Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$. Dann folgt aus $f(n) = O(g(n))$, dass $(f + g)(n) = \Theta(g(n))$ ist.

(**Hinweis:** Dies ist eine Bemerkung aus der Vorlesung, die wir dort aber **nicht** bewiesen haben.)

Aufgabe 5.4 *(Landau-Symbole III)* *(3 Punkte)*

Sei $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$R = \{(f, g) \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})^2 : f(n) = \Theta(g(n))\}$$

eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ ist.

(**Hinweis:** Dies ist ein Teil von Satz 1.9 aus der Vorlesung. Diesen Satz haben wir dort **nicht** bewiesen. Arbeiten Sie daher direkt mit der Definition von $\Theta(g(n))$ und verwenden Sie **keine** der unbewiesenen Bemerkungen.)

Abgabe der Hausaufgaben bis Donnerstag, den **29. November 2018, 11:00 Uhr,**
in die gekennzeichneten Briefkästen hinter Raum PK 4.3.
Sie benötigen mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte für die Studienleistung.