Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Aufgabenblatt 4

Kurzfragen

- Welche **Beweisprinzipien** kennen Sie?
- Was bedeutet für $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, dass $f(n) = O(g(n))$ ist?

Definition

Man sagt $x \in \mathbb{Z}$ ist ein **Teiler** von $y \in \mathbb{Z}$, geschrieben $x \mid y$, wenn es ein $m \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $y = mx$ ist.

Aufgabe 4.1 *(Beweisprinzipien)* *(1+1+2=4 Punkte)*

Eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ heißt **gerade**, wenn $2 \mid z$ gilt, andernfalls **ungerade**. Beweisen Sie:

(a) Sei $x \in \mathbb{Z}$. Ist $x^2 - 6x + 3$ gerade, dann ist x ungerade.

(b) Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Gilt $4 \mid (x^2 - 3y^2)$, dann ist mindestens eine der Zahlen x, y gerade.

(c) Es gibt $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass $x^y \in \mathbb{Q}$.
(**Hinweis:** Sie wissen aus der Vorlesung **nur**, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Betrachten Sie $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ und machen Sie eine geeignete Fallunterscheidung.)

Aufgabe 4.2 *(Vollständige Induktion)* *(2+2+2+2=8 Punkte)*

Beweisen Sie folgende Aussagen durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} (3i - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $5 \mid (6^n - 1)$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ gilt: $n! > 2^n$.

(d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Aufgabe 4.3 *(Groß-Oh-Notation)* *(1+1+1+1=4 Punkte)*

Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $n^2 + 2n + 1 = O(n^2)$

(b) $(n+1)^3 = O(n^3)$

(c) $2^n = O(n!)$

(d) $2^{2n} = O(2^n)$

Abgabe der Hausaufgaben bis Donnerstag, den **22. November 2018, 11:00 Uhr,**
in die gekennzeichneten Briefkästen hinter Raum PK 4.3.
Sie benötigen mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte für die Studienleistung.