Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Aufgabenblatt 3

Kurzfragen

- Was ist eine **Abbildung** von einer Menge A in eine Menge B?
- Wann heißt eine Abbildung **injektiv/surjektiv/bijektiv**?

Definition

Seien $f : D_f \to W_f$ und $g : D_g \to W_g$ Abbildungen mit $W_f \subseteq D_g$. Dann ist die **Komposition** (oder Verkettung) der Abbildungen f und g, geschrieben $g \circ f$, definiert als

$$g \circ f : D_f \to W_g,\ x \mapsto g(f(x)).$$

Aufgabe 3.1 *(Bijektion zwischen ganzen und natürlichen Zahlen)* *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0,\ x \mapsto \begin{cases} 2x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -2x-1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

eine bijektive Abbildung ist.

Aufgabe 3.2 *(Anzahlen von Abbildungen)* *(1+1+1+1=4 Punkte)*

Seien A und B endliche Mengen mit $|A| = m$ und $|B| = n$. Weiter sei $\mathrm{Abb}(A, B) = \{f : A \to B\}$ die Menge aller Abbildungen von A nach B. Bestimmen Sie begründet die Kardinalitäten, d.h. die Anzahl der Elemente, der folgenden Mengen:

(a) $\mathrm{Abb}(A, B)$

(b) $\{f \in \mathrm{Abb}(A, B) : f \text{ injektiv}\}$ für den Fall $m \leq n$

(c) $\{f \in \mathrm{Abb}(A, B) : f \text{ injektiv}\}$ für den Fall $m > n$

(d) $\{f \in \mathrm{Abb}(A, B) : f \text{ surjektiv}\}$ für den Fall $m = n$

Bitte wenden.

Aufgabe 3.3 *(Komposition von Abbildungen)* *(2+2=4 Punkte)*

Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Abbildungen definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 6, & \text{falls } x \geq 2 \\ x^2 - 3x + 4, & \text{falls } x < 2 \end{cases}$$

und $g(x) = -x^2 + 6$. Bestimmen Sie

(a) $g \circ f$

(b) $f \circ g$

Aufgabe 3.4 *(Injektivität, Surjektivität und Komposition)* *(1+1+1+1=4 Punkte)*

Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen und $g \circ f : A \to C$ ihre Komposition. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g beide injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv.

(b) Ist $g \circ f$ injektiv, dann ist auch f injektiv.

(c) Es gibt nichtleere Mengen A, B, C, sowie Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, so dass $g \circ f$ injektiv ist, aber g nicht injektiv.

(d) Es gibt nichtleere Mengen A, B, C, sowie Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$, so dass $g \circ f$ surjektiv ist, aber f nicht surjektiv.

Abgabe der Hausaufgaben bis Donnerstag, den **15. November 2018, 11:00 Uhr,**
in die gekennzeichneten Briefkästen hinter Raum PK 4.3.
Sie benötigen mindestens 50% der Hausaufgabenpunkte für die Studienleistung.