Mathematische Methoden in der Kommunikationstheorie
(Sommersemester 2018)

Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Alexander Cant, M.Sc.
a.cant@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Übungsblatt 9
(Abgabe: 19.06.2018 in der VL)

Aufgabe 1. (Perfekte Codes über $\mathbb{F}_2$)
Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $\mathcal{C}$ ein perfekter $(n, k, 7)$-Code über $\mathbb{F}_2$, so gilt $n = 7$ oder $n = 23$.

b) Es existieren perfekte Codes der Länge 7 bzw. 23 mit Minimaldistanz 7 über $\mathbb{F}_2$.

Aufgabe 2. (Gewichte in Codes über $\mathbb{F}_2$)
Zeigen Sie: Ist $\mathcal{C}$ ein Code über $\mathbb{F}_2$, so gilt entweder

- $w(c)$ ist gerade für alle $c \in \mathcal{C}$, oder
- $w(c)$ ist gerade für genau die Hälfte aller $c \in \mathcal{C}$.

Aufgabe 3. (Summe von Codes und duale Codes)
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Codes der gleichen Länge über $\mathbb{F}_q$. Weiter sei

$$\mathcal{C} + \mathcal{D} = \{c + d \mid c \in \mathcal{C}, d \in \mathcal{D}\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{C} + \mathcal{D}$ ist wieder ein Code.

b) $(\mathcal{C} + \mathcal{D})^\perp = \mathcal{C}^\perp \cap \mathcal{D}^\perp$.

Aufgabe 4. (MacWilliams-Identität für Codes über $\mathbb{F}_2$)
Sei $\mathcal{C}$ ein (n, k)-Code über $\mathbb{F}_2$. Bezeichne

$$A_i = |\{c \in \mathcal{C} \mid w(c) = i\}| \qquad \text{und} \qquad B_i = |\{c \in \mathcal{C}^\perp \mid w(c) = i\}|.$$

Beweisen Sie die MacWilliams-Identität:

$$B_j = \frac{1}{2^k} \sum_{i=0}^{n} A_i K_{i,j}^{(n)}, \quad j = 0, \dots, n$$

wobei

$$K_{i,j}^{(n)} = \sum_{h=0}^{n} (-1)^h \binom{i}{h} \binom{n-i}{j-h}.$$

Hinweis: Auf der Rückseite finden Sie eine Anleitung für den Beweis.

Betrachten Sie für $x, y \in \mathbb{F}_q^n$ das Produkt gegeben durch

$$(x, y) = (-1)^{\langle x,y \rangle}.$$

Gehen Sie in folgenden Schritten vor:

a) Für $y \in \mathbb{F}_2^n$ gilt:

$$\sum_{x \in \mathcal{C}} (x, y) = \begin{cases} 2^k, & \text{falls } y \in \mathcal{C}^\perp \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

b) Sei $x \in \mathbb{F}_2^n$ mit $w(x) = i$ und sei $V_j = \{y \in \mathbb{F}_2^n \mid w(y) = j\}$. Dann gilt:

$$\sum_{y \in V_j} (x, y) = K_{i,j}^{(n)}.$$

c) Benutzen Sie schlussendlich a) und b) um die MacWilliams-Identität zu beweisen.