Mathematische Methoden in der Kommunikationstheorie
(Sommersemester 2018)

Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Alexander Cant, M.Sc.
a.cant@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Übungsblatt 8
(Abgabe: 12.06.2018 in der VL)

Aufgabe 1. (Lineare Codes)
Betrachte den $(4,2)$-Code $\mathcal{C}_1$ über $\mathbb{F}_3$ mit erzeugender Matrix

$$G_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und den $(4,2)$-Code $\mathcal{C}_2$ über $\mathbb{F}_2$ mit erzeugender Matrix

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Bestimmen Sie - falls möglich - erzeugende Matrizen für $\mathcal{C}_1$ und $\mathcal{C}_2$ in Standardform.

b) Bestimmen Sie eine Prüfmatrix H_1 für $\mathcal{C}_1$ und eine Prüfmatrix H_2 für $\mathcal{C}_2$.

c) Berechnen Sie die Minimaldistanzen $d_{\min}(\mathcal{C}_1)$ und $d_{\min}(\mathcal{C}_2)$.

d) Entscheiden Sie, ob $\mathcal{C}_1$ bzw. $\mathcal{C}_2$ ein MDS-Code bzw. ein perfekter Code sind.

Aufgabe 2. (Syndrom-Decodierung)
Betrachte den $(6,3)$-Code $\mathcal{C}$ über $\mathbb{F}_2$, der durch die erzeugende Matrix

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Berechnen Sie eine Prüfmatrix für $\mathcal{C}$ und bestimmen Sie die Minimaldistanz $d_{\min}(\mathcal{C})$

b) Verwenden Sie die Syndrom-Decodierung um das empfangene Wort $r = (1,1,1,1,0,0)$ zu decodieren.

Aufgabe 3. (Hadamard-Matrizen)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Seien H und K Hadamard-Matrizen der Ordnung n bzw. m, dann ist $H \otimes K$ eine Hadamard-Matrix der Ordnung nm.

b) Ist H eine Hadamard-Matrix der Ordnung n, so gilt $n \in \{1, 2, 4k \mid k \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 4. (Hadamard-Ungleichung)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $M \in M_n(\mathbb{R})$ und seien alle Einträge m_{ij} von M beschränkt durch C, d.h. es gelte $|m_{ij}| \leq C$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, so gilt $|\det(M)| \leq C^n n^{\frac{n}{2}}$.

b) Sei $M \in M_n(\mathbb{R})$ und gelte für alle Einträge von M, dass $|m_{ij}| \leq 1$ ist. Dann gilt $|\det(M)| = n^{\frac{n}{2}}$ genau dann, wenn M eine Hadamard-Matrix ist.