Mathematische Methoden in der Kommunikationstheorie
(Sommersemester 2018)

Dr. Tobias Moede
t.moede@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Alexander Cant, M.Sc.
a.cant@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 515
0531 391-7516

Technische Universität Braunschweig

Übungsblatt 10
(Abgabe: 26.06.2018 in der VL)

Aufgabe 1. (Gaußsches Integral)
Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Aufgabe 2. (Schwartz-Funktionen mit kompaktem Träger)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Konstruieren Sie eine nicht-verschwindende, beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $f(x) = 0$ für alle $x \notin [a, b]$ gilt.

Aufgabe 3. (Eigenschaften der Fourier-Transformation)
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

a) (Translation) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Gilt $h(x) = f(x - x_0)$, so ist $\hat{h}(y) = e^{-2\pi i x_0 y} \hat{f}(y)$.

b) (Modulation) Sei $y_0 \in \mathbb{R}$. Gilt $h(x) = e^{2\pi i x y_0} f(x)$, so ist $\hat{h}(y) = \hat{f}(y - y_0)$.

c) (Skalierung) Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Gilt $h(x) = f(ax)$, so ist $\hat{h}(y) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(\frac{y}{a})$.

d) (Faltung I) Sei $h(x) = (f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) g(x - y) dy$, so gilt $\hat{h}(y) = \hat{f}(y) \cdot \hat{g}(y)$.

e) (Faltung II) Sei $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, so gilt $\hat{h}(y) = (\hat{f} * \hat{g})(y)$.

Aufgabe 4. (Parsevalsches Theorem)
Seien $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dann gilt:

a)
$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) \overline{\hat{g}(y)} dy,$$

b)
$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^2 dy.$$