Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

11. Große Übung

Aufgabe G.11.1

Sei $V = \mathbb{R}^n$ und sei $\psi : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch

$$[\ ,\ ] : V \times V \to \mathbb{R},\ (v, w) \mapsto [v, w] := \langle \psi(v), w \rangle,$$

eine symmetrische Bilinearform definiert wird.
(Es ist $\langle\ ,\ \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf V.)

Aufgabe G.11.2

Sei $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis des euklidischen Vektorraums V. Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f : V \to V$ genau dann selbstadjungiert ist, wenn gilt:

$$\langle f(v_i), v_j \rangle = \langle v_i, f(v_j) \rangle \quad \text{für alle } 1 \leqslant i, j \leqslant n.$$

Aufgabe G.9.7

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Veltorraum mit symmetrischer Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$. Wir definieren das **Radikal** $\mathbf{R}$ der Bilinearform durch

$$\mathbf{R} = \{v \in V \mid v^{\perp} = V\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{R}$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe G.9.8

Sei V ein reeller Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Für zwei Vektoren

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \in V \qquad \text{und} \qquad w = \sum_{i=1}^{n} h_i v_i \in V$$

definieren wir eine Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ durch

$$\langle v, w\rangle = k_1 h_1 + k_2 h_2 + \ldots + k_{n-1} h_{n-1} - k_n h_n.$$

(a) Bestimmen Sie das Radikal $\mathbf{R}$ von $\langle\ ,\ \rangle$.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbf{R}$.

Aufgabe G.10.7

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zu $v \in V$ definieren wir

$$\Phi_v : V^* \to \mathbb{K},\ \ f \mapsto f(v).$$

Somit gilt $\Phi_v \in V^{**}$.

(a) Zeigen Sie, dass die nachstehende Abbildung $\mathbb{K}$-linear und injektiv ist:

$$\Phi:\ V \to V^{**},\ v \mapsto \Phi_v, \qquad \text{mit} \qquad \Phi_v(f) = f(v).$$

(b) Zeigen Sie, dass im Fall von $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$ gilt: $\dim_{\mathbb{K}}(V^{**}) = n$.