Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

10. Große Übung

Aufgabe G.10.1

Sei V ein euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$. Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $f : V \to V$ genau dann orthogonal ist, wenn für alle $v \in V$ gilt: $\|f(v)\| = \|v\|$.

Aufgabe G.10.2

Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $M \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $M = \{v = (v_1, v_2) \in V \mid 2 \leqslant v_1 \leqslant 3,\ 1 \leqslant v_2 \leqslant 2\}$. Sei weiter $N \subseteq V$, wobei N alle Elemente von V umfasst, die im Quadrat mit den Ecken $a, b, c, d \in V$ liegen mit

$$a = \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right), \qquad b = \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right),$$
$$c = \left(-\frac{3}{2} - \sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right), \qquad d = \left(-1 - \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1\right).$$

(a) Skizzieren Sie die Mengen M und N im $\mathbb{R}^2$.

(b) Geben Sie, wenn möglich, eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass $f(M) = N$ gilt.

Aufgabe G.10.3

(a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $U \leqslant V$ mit $U = \langle(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)\rangle$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ von U. Ergänzen Sie anschließend $\mathcal{B}'$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^4$ und $U \leqslant V$ mit Basis $\mathcal{C} = \{(1,1,1,1), (-1,1,-1,1), (1,1,-1,-1)\}$. Nutzen Sie den Satz von Schmidt und bestimmen Sie ausgehend von $\mathcal{C}$ eine Orthonormalbasis $\mathcal{B}'$ von U. Ergänzen Sie anschließend $\mathcal{B}'$ zu einer Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ von V.

Definition: Dualraum
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Es sei V^* die Menge aller $\mathbb{K}$-linearen Abbildungen $V \to \mathbb{K}$. Man nennt V^* den Dualraum zu V.

Aufgabe G.10.4

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass V^* ebenfalls ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Aufgabe G.10.5

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$.

(a) Geben Sie eine Basis für V^* an.

(b) Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{K}}(V^*) = n$.

Definition: Duale Abbildung
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $F : V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung. Dann definiert F^* durch

$$F^* : W^* \to V^*,\ f \mapsto F^*(f) = f \circ F,$$

eine lineare Abbildung zwischen den Dualräumen. Diese Abbildung wird die zu F duale Abbildung genannt.

Aufgabe G.10.6

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume. Sei $\mathrm{Hom}(V, W)$ die Menge aller linearen Abbildungen $V \to W$ und analog sei $\mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ die Menge aller linearen Abbildungen $W^* \to V^*$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$* :\ \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(W^*, V^*),\ F \mapsto F^*,$$

eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie: Wenn $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ injektiv ist, dann ist $F^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ surjektiv.

(c) Zeigen Sie: Wenn $F \in \mathrm{Hom}(V, W)$ surjektiv ist, dann ist $F^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ injektiv.

Definition: Bidualraum
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Dualraum V^*. Der Dualraum zu V^* ist $(V^*)^* = V^{**}$ und heißt Bidualraum zu V.

Aufgabe G.10.7

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zu $v \in V$ definieren wir

$$\Phi_v : V^* \to \mathbb{K},\quad f \mapsto f(v).$$

Somit gilt $\Phi_v \in V^{**}$.

(a) Zeigen Sie, dass die nachstehende Abbildung $\mathbb{K}$-linear und injektiv ist:

$$\Phi :\ V \to V^{**},\ v \mapsto \Phi_v, \qquad \text{mit} \qquad \Phi_v(f) = f(v).$$

(b) Zeigen Sie, dass im Fall von $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$ gilt: $\dim_{\mathbb{K}}(V^{**}) = n$.