Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

9. Große Übung

Aufgabe G.8.5

Welche der nachstehenden Matrizen sind diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{4\times 4}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}.$$

Aufgabe G.9.1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ folgende Eigenschaft hat:

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle := \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\varphi),$$

wobei φ der von v und w eingeschlossene Winkel in der von v und w aufgespannten Ebene ist und wobei $\varphi = 0$ gilt, falls v und w parallel sind.

Aufgabe G.9.2

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $V = \mathbb{K}^n$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$. Zeigen Sie, dass der Nullvektor orthogonal zu jedem Vektor $v \in V$ ist.

Aufgabe G.9.3

Geben Sie für den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ eine Grammatrix eines Skalarproduktes an, deren sämtliche Einträge von Null verschieden sind.

Aufgabe G.9.4

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie: A ist genau dann positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A größer als Null sind.

Aufgabe G.9.5

Im folgenden sind Grammatrizen zu verschiedenen Bilinearformen von $\mathbb{R}^4$ gegeben. Entscheiden Sie jeweils, ob die dadurch definierten Bilinearformen positiv definit sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G.9.6

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeigen Sie, dass die Menge der symmetrischen Matrizen aus $\mathbb{K}^{n\times n}$ einen Vektorraum bilden. Bestimmen Sie die Dimension dieses Vektorraums.

Aufgabe G.9.7

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Veltorraum mit symmetrischer Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$. Wir definieren das **Radikal** $\mathbf{R}$ der Bilinearform durch

$$\mathbf{R} = \{v \in V \mid v^{\perp} = V\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbf{R}$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe G.9.8

Sei V ein reeller Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Für zwei Vektoren

$$v = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \in V \qquad \text{und} \qquad w = \sum_{i=1}^{n} h_i v_i \in V$$

definieren wir eine Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ durch

$$\langle v, w\rangle = k_1 h_1 + k_2 h_2 + \ldots + k_{n-1} h_{n-1} - k_n h_n.$$

(a) Bestimmen Sie das Radikal $\mathbf{R}$ von $\langle\ ,\ \rangle$.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbf{R}$.