Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

8. Große Übung

Aufgabe G.8.1

Sei $V = \mathbb{Q}^3$ und sei $\mathcal{B}$ die Standardbasis. Sei $f : V \to V$ bezüglich $\mathcal{B}$ gegeben durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von M.

(b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

(c) Gibt es eine Basis von $\mathbb{Q}^3$, die nur aus Eigenvektoren von M besteht? Bestimmen Sie, wenn möglich, die Darstellungsmatrix von f bezüglich dieser Basis.

Aufgabe G.8.2

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ und sei M definiert als

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass M diagonalisierbar ist.

(b) Gilt die Aussage auch über beliebigen anderen Körpern?

Aufgabe G.8.3

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Matrix, in der die Summe der Elemente in jeder Zeile konstant ist.

(a) Zeigen Sie, dass M mindestens einen Eigenwert κ hat.

(b) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zu κ.

(c) Gilt die Behauptung noch, wenn man fordert, dass die Summe der Einträge aus jeder Spalte von M konstant ist?

Aufgabe G.8.4

Sei $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Wenn $f^2 = 0$ ist, dann ist entweder $f = 0$ oder es gibt eine Darstellungsmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe G.8.5

Welche der nachstehenden Matrizen sind diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_7^{4\times 4}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4\times 4}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{4\times 4}.$$