



7. Große Übung

Aufgabe G.6.2

- (a) Sei $X = \{1, 2, \dots, m\}$ und sei $\pi = (a_1 a_2 \dots a_n) \in \text{Sym}(X)$ ein Zykel der Länge n . Dabei sei $m \geq n$. Zeigen Sie, dass $\text{sign}(\pi) = (-1)^{n-1}$ gilt.
- (b) Berechnen Sie das Signum nachfolgender Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G.6.3

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{-1, 1\}$ zusammen mit der Standardmultiplikation eine Gruppe ist.
- (b) Sei X eine Menge. Betrachten Sie die Abbildung

$$\text{sign} : \text{Sym}(X) \rightarrow (\{-1, 1\})$$

Zeigen Sie, dass für $\sigma, \tau \in \text{Sym}(X)$ gilt:

$$\text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau) = \text{sign}(\sigma \cdot \tau)$$

Aufgabe G.6.4

Bei welcher der nachfolgenden Aufgaben handelt es sich um eine Gruppe?

- (a) \mathbb{Z} bezüglich ” + ”
- (b) \mathbb{Z} bezüglich ” · ”
- (c) \mathbb{Q} bezüglich ” + ”
- (d) \mathbb{Q} bezüglich ” · ”
- (e) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bezüglich ” + ”
- (f) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bezüglich ” · ”

Aufgabe G.7.1

Berechnen Sie die Determinanten der nachstehenden Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 6 \\ 1 & 3 & 9 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 9 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{6 \times 6},$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{6 \times 6}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 9 & 11 & 13 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{6 \times 6},$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i & \sqrt{3} \\ 1-i & \sqrt{5}i & \sqrt{3}i \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}+i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Aufgabe G.7.2

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}.$$

- Welche der Vektoren $u = (3, -1, 1)$, $v = (3, 1, -1)$, $w = (1, 1, 3) \in \mathbb{Q}^3$ sind Eigenvektoren von A ?
- Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von A ist.
- Bestimmen Sie $\text{Eig}(A, 1)$.

**Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Start in das Jahr 2018!**



Bildquelle:
<http://nichtlustig.de/main.html>