



6. Große Übung

Aufgabe G.5.1

Sei $V = \mathbb{K}^{n \times n}$ und sei

$$f : V \rightarrow \mathbb{K}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

- (a) Zeigen Sie, dass f linear ist.
- (b) Bestimmen Sie $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$.
- (c) Überprüfen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe G.6.1

Berechnen Sie die Determinante der nachstehenden Matrizen

- (a) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $a_{i,j} = 0 \forall j < i$.
- (b) Die Matrizen P aus dem Beweis von Satz 4.18.

(c) $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_{11}^{6 \times 6}$

Aufgabe G.6.2

- (a) Sei $X = \{1, 2, \dots, m\}$ und sei $\pi = (a_1 a_2 \dots a_n) \in \text{Sym}(X)$ ein Zykel der Länge n . Dabei sei $m \geq n$. Zeigen Sie, dass $\text{sign}(\pi) = (-1)^{n-1}$ gilt.
- (b) Berechnen Sie das Signum nachfolgender Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 9 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G.6.3

- (a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{-1, 1\}$ zusammen mit der Standardmultiplikation eine Gruppe ist.
(b) Sei X eine Menge. Betrachten Sie die Abbildung

$$\text{sign} : \text{Sym}(X) \rightarrow (\{-1, 1\})$$

Zeigen Sie, dass für $\sigma, \tau \in \text{Sym}(X)$ gilt:

$$\text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau) = \text{sign}(\sigma \cdot \tau)$$

Aufgabe G.6.4

Bei welcher der nachfolgenden Aufgaben handelt es sich um eine Gruppe?

- (a) \mathbb{Z} bezüglich " + "
(b) \mathbb{Z} bezüglich " · "
(c) \mathbb{Q} bezüglich " + "
(d) \mathbb{Q} bezüglich " · "
(e) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bezüglich " + "
(f) $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ bezüglich " · "

Aufgabe G.6.5

Sei X die Menge der Eckpunkte eines regelmäßigen 5-Ecks

- (a) Bestimmen Sie alle Elemente aus $\text{Sym}(X)$ die das 5-Eck nur drehen.
(b) Bestimmen Sie alle Elemente aus $\text{Sym}(X)$ die das 5-Eck nur spiegeln.
(c) Sei S die Menge aller Drehungen aus Teil a) und sei T die Menge aller Spiegelungen aus Teil b). Sei $D = S \cup T$. Ist D bezüglich der Komposition von Permutation eine Gruppe?