Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

5. Große Übung

Aufgabe G.4.2

Prüfen Sie in den nachstehenden Fällen, ob die angegebenen Funktionen linear sind. Untersuchen Sie die Funktionen weiterhin auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(d) $f_4 : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p,\ x \mapsto x^p$, für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$.

(e) $f_5 : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3,\ x \mapsto x^2$.

(f) $f_6 : \mathbb{Z}_{11}^4 \to \mathbb{Z}_{11}^2,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_3, x_2 + 3x_4)$.

Aufgabe G.4.3

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Sei $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ der Vektorraum der Zahlenfolgen in $\mathbb{K}$ und sei V_c der Vektorraum der Zahlenfolgen in $\mathbb{K}$ mit endlichem Träger (vergleiche Aufgabe **G.3.5**). Sei W der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{K}$ (vergleiche Aufgabe **G.3.1**). Sei weiter:

$$g :\ V_c \to W, \quad (a_i)_{i=0}^{\infty} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

(a) Ist g wohldefiniert?

(b) Untersuchen Sie g auf Linearität, Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(c) Lässt sich die Funktion g auf den Definitionsbereich V verallgemeinern?

Aufgabe G.5.1

Sei $V = \mathbb{K}^{n\times n}$ und sei

$$f : V \to \mathbb{K}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

(a) Zeigen Sie, dass f linear ist.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

(c) Überprüfen Sie f auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe G.5.2

Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\mathrm{Rg}(A) = n$. Sei $B = (A|I_n) \in \mathbb{K}^{n\times 2n}$ und sei B' die Diagonalform von B.

(a) Zeigen Sie, dass $B' = (I_n|C)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass $C \cdot A = A \cdot C = I_n$ gilt. Es gilt also $C = A^{-1}$.