Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

4. Große Übung

Aufgabe G.3.5

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge alle Folgen über $\mathbb{K}$. Es werden auf V die folgenden Verknüpfungen definiert:

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V, &\qquad ((a_i)_{i=1}^{\infty}, (b_i)_{i=1}^{\infty}) \mapsto (a_i)_{i=1}^{\infty} + (b_i)_{i=1}^{\infty} = ((a_i + b_i)_{i=1}^{\infty}, \\ \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, &\qquad (\lambda, (a_i)_{i=1}^{\infty}) \mapsto \lambda \cdot (a_i)_{i=1}^{\infty} = ((\lambda a_i)_{i=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Zu einer Folge $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in V$ wird der Träger (engl. „*support*") von a definiert als

$$\mathrm{supp}(a) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}.$$

Sei $V_c = \{a \in V \mid |\mathrm{supp}(a)| < \infty\} \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass V_c ein Unterraum von V ist.

Aufgabe G.3.6

Sei $V = \{a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \text{ für } i \geqslant 3\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Basis an.

Aufgabe G.4.1

Lösen Sie das nachstehende lineare Gleichungssystem über den rationalen Zahlen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} x^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G.4.2

Prüfen Sie in den nachstehenden Fällen, ob die angegebenen Funktionen linear sind. Untersuchen Sie die Funktionen weiterhin auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(a) $f_1 : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q},\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 x_2, x_3)$.

(b) $f_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (3x_1 + 1, 3x_2 + 1)$.

(c) $f_3 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (3x_1 + x_2, -x_1 + 3x_2, 0)$.

(d) $f_4 : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p,\ x \mapsto x^p$, für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$.

(e) $f_5 : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_3,\ x \mapsto x^2$.

(f) $f_5 : \mathbb{Z}_{11}^4 \to \mathbb{Z}_{11}^2,\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1 + x_3, x_2 + 3x_4)$.

Aufgabe G.4.3

Sei $\mathbb{K}$ ein beliebiger Körper. Sei $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_0}$ der Vektorraum der Zahlenfolgen in $\mathbb{K}$ und sei V_c der Vektorraum der Zahlenfolgen in $\mathbb{K}$ mit endlichem Träger (vergleiche Aufgabe **G.3.5**). Sei W der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{K}$ (vergleiche Aufgabe **G.3.1**). Sei weiter:

$$g : V_c \to W, \quad (a_i)_{i=0}^{\infty} \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i.$$

(a) Ist g wohldefiniert?

(b) Untersuchen Sie g auf Linearität, Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

(c) Lässt sich die Funktion g auf den Definitionsbereich V verallgemeinern?