Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

3. Große Übung

Aufgabe G.3.1

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, sei x eine Unbestimmte über $\mathbb{K}$ und sei V der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{K}$. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann definiere

$$U_n = \{x^n f(x) \mid f(x) \in V\} \subseteq V.$$

(a) Zeigen Sie, dass U_n ein Unterraum von V ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von V/U_n.

Aufgabe G.3.2

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und sei $U \leqslant V$ ein Unterraum. Ein Unterraum $W \leqslant V$ heißt ein **Komplement** zu U in V, wenn gilt:

$$W \cap U = \{0\} \quad \text{und} \quad W + U = V.$$

(a) Zeigen Sie, dass jeder Unterraum U ein Komplement W in V besitzt.

(b) Zeigen Sie: $\dim(W) = \dim(V) - \dim(U)$ für jedes Komplement W zu U in V.

(c) Sei B eine Basis eines Komplements W zu U in V. Zeigen Sie, dass dann $\{b + U \mid b \in B\}$ eine Basis von V/U ist.

Aufgabe G.3.3

Bestimmen Sie eine obere Dreiecksform und, falls möglich, die Diagonalform der nachstehenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_5^{4\times 4}$$

Aufgabe G.3.4

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{Q}^3$ und der Unterraum $U = \langle (1, s, 0), (t+1, -4, 0), (0, 0, 1+s+t) \rangle \leqslant V$.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von U.

(b) Bestimmen Sie eine Basis von V/U.

Aufgabe G.3.5

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und sei $V = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge alle Folgen über $\mathbb{K}$. Es werden auf V die folgenden Verknüpfungen definiert:

$$\begin{aligned} + : V \times V \to V, \qquad & ((a_i)_{i=1}^{\infty}, (b_i)_{i=1}^{\infty}) \mapsto (a_i)_{i=1}^{\infty} + (b_i)_{i=1}^{\infty} = ((a_i + b_i)_{i=1}^{\infty}, \\ \cdot : \mathbb{K} \times V \to V, \qquad & (\lambda, (a_i)_{i=1}^{\infty}) \mapsto \lambda \cdot (a_i)_{i=1}^{\infty} = ((\lambda a_i)_{i=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Zu einer Folge $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in V$ wird der Träger (engl. „*support*“) von a definiert als

$$\operatorname{supp}(a) := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0\}.$$

Sei $V_c = \{a \in V \mid |\operatorname{supp}(a)| < \infty\} \subseteq V$.

(a) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass V_c ein Unterraum von V ist.

Aufgabe G.3.6

Sei $V = \{a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid a_i = a_{i-2} + a_{i-1} \text{ für } i \geqslant 3\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

(a) Zeigen Sie, dass V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimension von V und geben Sie eine Basis an.