



2. Große Übung

Aufgabe G.2.1

Sei V ein Vektorraum über einem beliebigen Körper und seien $U, W \leq V$ Unterräume. Sei weiter

$$U - W := \{u - w \mid u \in U, w \in W\}.$$

- (a) Zeigen Sie: $U - W = U + W$.
- (b) Ist $U - W$ ein Unterraum von V ?
- (c) Sind $U \cup W$ und $U \cap W$ im Allgemeinen Unterräume von V ?
- (d) Beweisen Sie folgende Aussage oder geben Sie ein Gegenbeispiel an: Für $u, u' \notin U$ gilt: $u - u' \notin U$.
- (e) Ist der Faktorraum V/U ein Unterraum von V ?

Aufgabe G.2.2

Es sei $V = \{(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{Z}_5^5 \mid v_1 + v_2 = v_3\}$. Weiter seien U und W Unterräume von V mit Basen B_U beziehungsweise B_W :

$$B_U := \{(1, 1, 2, 0, 0), (1, 0, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1, 0)\} \quad \text{und} \quad B_W := \{(1, 0, 1, 0, 1), (2, 0, 2, 0, 1)\}.$$

- (a) Geben Sie eine Basis von V an und bestimmen Sie die Dimension von V .
- (b) Bestimmen Sie die Dimensionen der Vektorräume $U, W, U + W$ und $U \cap W$.
- (c) Zeigen Sie, dass der Vektor $f = (3, 0, 3, 0, 0)$ sowohl in U als auch in W liegt.
- (d) Geben Sie für die Vektorräume $U + W$ und $U \cap W$ jeweils eine Basis an.
- (e) Geben Sie den Koordinatenvektor für f aus (c) bezüglich der Basen B_U und B_W an.
- (f) Bestimmen Sie die Dimension von V/W und geben Sie eine Basis von V/W an.
- (g) Liegt f im Vektorraum V/W ?

Aufgabe G.2.3

Sei $V = \mathbb{Z}_2^4$ und sei $U = \{(a, a, b, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}_2\} \leq V$.

- (a) Ergänzen Sie $\{(1, 1, 1, 1)\}$ zu einer Basis von U .
- (b) Ergänzen Sie die Basis von U zu einer Basis von V .