Prof. Dr. B. Eick
beick@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 520
0531 391-7525

M. Sc. Morten Wesche
m.wesche@tu-bs.de
Universitätsplatz 2, Raum 516
0531 391-7524

Technische Universität Braunschweig

1. Große Übung

Aufgabe G.1.1

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ und sei $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Seien „$+$" und „$\cdot$" auf $\mathbb{Z}_n$ wie in der Vorlesung definiert. Zeigen Sie: Ein Element $a \in \mathbb{Z}_n$ ist genau dann multiplikativ invertierbar, wenn $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$ gilt.

Aufgabe G.1.2

Bestimmen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}_3$.

Aufgabe G.1.3

Auf der Menge $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ werden die Verknüpfungen „$+$" und „$\cdot$" wie folgt definiert:

$$(a, b) + (x, y) = (a + x, b + y) \quad \text{und}$$
$$(a, b) \cdot (x, y) = (ax + 2by, ay + bx).$$

Dabei wurden auf der rechten Seite jeweils die Verknüpfungen aus $\mathbb{Q}$ verwendet.

(a) Zeigen Sie, dass die Multiplikation „$\cdot$" auf K kommutativ ist.

(b) Zeigen Sie, dass neutrale Elemente bezüglich „$+$" und „$\cdot$" existieren und geben Sie diese an.

(c) Für welche Elemente $(a, b) \in K$ existieren inverse Elemente bezüglich „$+$"? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

(d) Für welche Elemente $(a, b) \in K$ existieren inverse Elemente bezüglich „$\cdot$"? Geben Sie diese gegebenenfalls an.

Aufgabe G.1.4

(a) Betrachten Sie den $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $V = \mathbb{Z}_2^2$. Bestimmen Sie alle Unterräume von V.

(b) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und sei $W = \mathbb{Z}_p^2$. Bestimmen Sie die Anzahl aller Unterräume von W.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl aller Unterräume des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$.