

Numerische Methoden zur passivitätserhaltenden Modellreduktion

H. Faßbender* und P. Benner†

20. November 2005

Zusammenfassung: Bei der Modellierung dynamischer Systeme entstehen heutzutage häufig Systeme hoher Ordnung (d.h. mit 10.000 und mehr Gleichungen). Um eine numerische Simulation mit akzeptablem zeitlichem Umfang zu gewährleisten, reduziert man das gegebene dynamische System von Gleichungen zu einem System derselben Form, welches eine Lösung mit stark verkürzter Rechenzeit erlaubt. Häufig wird gefordert, daß das reduzierte System die selben Eigenschaften wie das unreduzierte Modell aufweist; wichtige Eigenschaften sind in diesem Zusammenhang insbesondere Stabilität und Passivität. Dieser Beitrag gibt einen Überblick über numerische Verfahren zur passivitätserhaltenden Modellreduktion.

Schlagwörter: Zustandsraummodell, linear, zeitinvariant, stabil, passiv, Modellreduktion, balanciertes Abschneiden, Padé-Approximation.

1 Einleitung

Dieser Beitrag beschäftigt sich mit linearen zeitinvarianten Systemen in Zustandsraumdarstellung

$$\Sigma : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1)$$

wobei A, B, C und D reelle Matrizen der Größen $n \times n$, $n \times p$, $p \times n$, bzw. $p \times p$ seien. Hier sind u die Eingangsgröße, x der Zustand und die Funktion $f(x, u) = Ax(t) + Bu(t)$ beschreibt die Dynamik des Systems Σ . y ist die Ausgangsgröße und $h(x, u) = Cx(t) + Du(t)$ beschreibt wie die Ausgangsgröße aus dem Zustand und der Eingangsgröße abgeleitet wird. Die Systemordnung von

*Technische Universität Braunschweig, Institut *Computational Mathematics*, D-38023 Braunschweig, Fax: +49-(0)531-391-8206, E-Mail: h.fassbender@tu-bs.de

†Technische Universität Chemnitz, Fakultät für Mathematik, D-09107 Chemnitz, Fax: +49-(0)371-531-2657, E-Mail: benner@mathematik.tu-chemnitz.de

Σ ist als Anzahl der Zustände n definiert. Hier werden Systeme betrachtet, bei die auftretenden Matrizen sehr groß sind, d.h., es können 10.000 und mehr Gleichungen auftreten. Um eine numerische Simulation mit akzeptablem zeitlichem Umfang zu gewährleisten, approximiert man Σ durch ein anderes dynamisches System

$$\hat{\Sigma} : \hat{x}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \quad \hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + Du(t) \quad (2)$$

wobei $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ reelle Matrizen der Größe $\ell \times \ell, \ell \times p$, bzw. $p \times \ell$ seien. In diesem neuen System soll die Anzahl der Zustände (die Anzahl der zu lösenden Differentialgleichungen erster Ordnung) sehr viel kleiner als die des Originalsystems sein, $\ell \ll n$. Bei dieser Ordnungsreduktion sollten alle relevanten Systemeigenschaften (Stabilität, Passivität, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit, etc.) erhalten bleiben. Der Approximationsfehler (typischerweise als Norm $\|y - \hat{y}\|$ der Differenz der jeweiligen Ausgangsgrößen y bei gleichen Eingangsgrößen gemessen) sollte möglichst gering sein. Im Idealfall sollte eine globale Fehlerschranke existieren. Zudem muss das Reduktionsverfahren stabil und effizient durchführbar sein und automatisch mit einer vorgegebenen Fehlertoleranz enden.

Die Ansätze zur Modellreduktion linearer zeitinvarianter Systeme basieren alle auf der Idee, das Originalsystem Σ auf ein System niedrigerer Ordnung zu projizieren. Dazu werden auf eine geeignete Weise zwei reelle $n \times \ell$ Matrizen V und W mit $W^T V = I$ berechnet und ein reduziertes Modell durch Projektion mittels $\Pi = VW^T$ erzeugt:

$$\hat{A} = W^T A V, \quad \hat{B} = W^T B, \quad \hat{C} = C V, \quad \hat{D} = D. \quad (3)$$

In den letzten Jahren wurden im Wesentlichen zwei Kategorien von Ansätzen zur Modellreduktion verfolgt: die auf der Idee der Approximation einer Matrix durch eine Matrix mit niedrigerem Rang basierenden Methoden und die auf approximationstheoretischen Ideen beruhenden Methoden, welche eine geeignete Approximation an die Übertragungsfunktion konstruieren. Eine aktuelle Übersicht über Modellreduktionsverfahren gibt [1].

Die Verfahren der erste Kategorie haben ihren Ursprung in der durch die Singulärwertzerlegung (Singular Value Decomposition, SVD) [2] gegebene Approximation einer Matrix K durch eine Matrix M niedrigeren Ranges, so dass die Approximation optimal bzgl. der Spektralnorm ist, d.h. $\|K - M\|_2$ nimmt ein Minimum an. Für die Entscheidung, bis zu welchem Grad ein gegebener endlich-dimensionaler Operator durch einen von niedrigerem Rang approximiert werden kann, sind die sogenannten Singulärwerte ausschlaggebend. Dies sind gerade die Wurzeln der Eigenwerte des Produkts des Operators und seiner Adjungierten. Für den Fehler dieser Approximation kann eine a priori berechenbare obere Schranke angegeben werden. Für die linearen zeitinvarianten endlich-dimensionalen Systeme spielen die sogenannten Hankel-Singulärwerte dieselbe Rolle wie die Singulärwerte für Matrizen. Da die Hankel-Singulärwerte für viele Systeme sehr schnell abnehmen, sind oft akkurate Approximationen mit sehr kleiner Ordnung

möglich. In diese Kategorie von Modellreduktionsverfahren fallen insbesondere die Hankel-Norm-Approximation [3], die Approximation durch balanciertes Abschneiden [4] und die Singular-Perturbation-Approximation [5]. Für den Approximationsfehler dieser Verfahren gibt es globale Fehlerschranken, die man zur vollautomatischen Berechnung eines reduzierten Modells nutzen kann. Systemeigenschaften wie Stabilität und u.U. Passivität bleiben erhalten. Einen Überblick über diese Verfahren findet man z.B. in [6]. Allerdings sind diese Verfahren als recht zeitaufwändig bekannt, weshalb sie in den Standardversionen üblicherweise nur für Systeme von einigen tausend Unbekannten verwendet werden. Diese Einschätzung ist durch neuere Entwicklungen in der Numerischen Linearen Algebra überholt, effiziente Implementierungen, mit denen Systeme bis zu einer Ordnung mehreren hunderttausend leicht reduziert werden können, existieren [7, 8].

Bei der zweiten Kategorie von Modellreduktionsverfahren [9] (siehe auch [10]) werden die Systemmatrizen selbst nicht wie bei den oben beschriebenen Verfahren geändert, sondern lediglich in Form von Matrix-Vektor-Multiplikationen benötigt. Sie können daher auf sehr hochdimensionale Systeme angewendet werden. Sie basieren auf dem Momentenabgleich der Impulsantwort des linearen Systems. Ihr Nachteil ist, dass es keine globale Fehlerabschätzung gibt, die Stabilität des Systems nicht unbedingt erhalten bleibt und die Ordnung des reduzierten Modells u.U. von Hand eingestellt werden muss. Eine Automatisierung des Modellreduktionsprozesses ist daher bisher nur bei speziellen Problemklassen möglich. Die beiden herausragenden Ansätze in dieser Kategorie sind das Padé-via-Lanczos-Verfahren (PVL) [11] und das Multipoint-Rational-Interpolation-Verfahren (MRI) [12]. Der PVL-Ansatz nutzt den Zusammenhang zwischen dem (nichtsynchronen) Lanczos-Verfahren und den klassischen Momentenabgleich-Techniken wie der Pad-Approximation aus. Der MRI-Ansatz betrachtet die Transferfunktion des linearen Systems an ausgewählten Frequenzen und erzeugt so eine Approximation der Transferfunktion über eine große Bandbreite von Frequenzen. Beide Verfahren haben sich in diversen Anwendungsfeldern als sehr effektiv erwiesen. Allerdings, da beide Ansätze von lokaler Natur sind, ist es schwierig, globale Fehlerabschätzungen zu finden. Hier existieren gut funktionierende Heuristiken.

Im folgenden sollen nur stabile und passive System Σ betrachtet werden. Ein System ist stabil, wenn die Matrix A stabil ist, d.h., wenn alle Eigenwerte von A in der offenen linken Halbebene liegen. Ein System ist passiv, wenn es intern keine Energie generiert und strikt passiv, wenn es Eingangsenergie verbraucht oder vergeudet. Ein klassisches Resultat [13] besagt, dass ein passives System positiv reell ist. Für die hier betrachteten linearen zeitinvarianten Systeme bedeutet dies gerade, dass die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ positiv reell sein, m.a.W. $G(s)$ ist analytisch und $G(s) + (G(s))^H \geq 0$ für $\text{Re}(s) > 0$ (siehe z.B. die Überblicksartikel [14, 15] und die dort genannten Referenzen). Möchte man ein stabiles und passives System ordnungsreduzieren, so ist es oft erforderlich, ein Modell kleinerer Ordnung zu erzeugen, welches die wichtigen Systemeig-

enschaften wie Stabilität und Passivität erhält. Im Abschnitt 2 werden einige passivitätserhaltende Modellreduktionsverfahren beschrieben, welche für gewisse Spezialfälle, wie sie z.B. in der Schaltkreissimulation auftreten, erfolgreich eingesetzt wurden. Diese Verfahren basieren alle auf Krylov-Raum-Verfahren. Die folgenden zwei Abschnitte stellen zwei Ansätze zur passivitätserhaltenden Modellreduktion vor, die ohne weitere einschneidende Voraussetzungen an das Originalsystem auskommen. Abschnitt 3 beschreibt ein Krylovraum-basiertes Verfahren, Abschnitt 4 ein SVD-basiertes Verfahren. Ein numerisches Beispiel wird in Abschnitt 5 diskutiert.

2 Verfahren für RLC-Netzwerke

Insbesondere in der Schaltkreissimulation treten große passive Systeme mit einigen zusätzlichen Eigenschaften auf, die die Entwicklung erfolgreicher Modellreduktionsverfahren für diese Spezialfälle erlauben. Diese Verfahren basieren alle auf Krylov-Raum-Verfahren.

Zur Vereinfachung der Diskussion sei in diesem Absatz angenommen, dass $p = 1$ gelte; das System (1) sei also ein Single-Input-Single-Output-System. Die Übertragungsfunktionen der Systeme (1) und (2) sind dann skalarwertige rationale Funktionen. Insbesondere kann für jedes s_0 , für welches $(s_0I - A)^{-1}$ existiert, die Übertragungsfunktion um s_0 in eine Potenzreihe entwickelt werden:

$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k (s - s_0)^k, \quad (4)$$

mit den Momenten m_k . Unter einer Padé-Approximation an G versteht man eine Funktion F , deren Entwicklung um s_0 mit der Entwicklung (4) von G in sovielen Momenten wie möglich übereinstimmt

$$F(s) = \sum_{k=0}^r m_k (s - s_0)^k + \text{Terme höherer Ordnung in } (s - s_0).$$

Da die Übertragungsfunktionen der Systeme (1) und (2) rationale Funktionen sind, kann insbesondere die Übertragungsfunktion des reduzierten Systems (2) als

$$\hat{G}(s) = \hat{D} + \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} = \frac{\phi_{\ell-1}(s)}{\psi_{\ell}(s)}$$

geschrieben werden, wobei $\phi_{\ell-1}$ und ψ_{ℓ} Polynome vom Grad höchstens $\ell - 1$ bzw. ℓ sind. Die beiden Polynome werden durch insgesamt 2ℓ Koeffizienten eindeutig bestimmt. Bei Padé-Verfahren versucht man nun, diese Koeffizienten so zu bestimmen, dass möglichst viele der führenden Momente von \hat{G} mit denen von G übereinstimmen. Numerisch stabile Verfahren zur Berechnung einer solchen Approximation beruhen häufig auf dem Lanczos-Verfahren [16] und erreichen eine Übereinstimmung der ersten 2ℓ Momente der beiden Übertragungsfunktionen.

Große lineare elektrische Netzwerke, die aus passiven Komponenten bestehen, wie z.B. ein RLC-Netzwerk, erlauben eine symmetrische Formulierung der Netzwerkgleichungen mit einer symmetrischen Übertragungsfunktion. Für diese speziellen Systeme wurde das Verfahren SyPVL [17] vorgeschlagen, es basiert auf dem symmetrischen Lanczos-Verfahren. Das Verfahren garantiert Passivität und Stabilität des reduzierten Systems nur für spezielle Netzwerke, wie z.B. RC-, RL- oder LC-Netzwerke. Die rationale Übertragungsfunktion wird durch eine rationale Funktion approximiert, so dass die ersten 2ℓ Momente übereinstimmen. Zugleich werden die dominanten Pole der Übertragungsfunktion erfaßt. Eine Variante für Multi-Input-Multi-Output-Systeme, genannt SyMPVL [18, 19], wurde ebenfalls entwickelt. Werden diese Verfahren auf allgemeine stabile und passive RLC-Systeme angewendet, so ist das reduzierte System i.d.R. weder stabil noch passiv. Eine iterative Nachbehandlung wie in [20] beschrieben ist notwendig, um Stabilität und Passivität des reduzierten Systems nachträglich zu erhalten.

Das Verfahren PRIMA [21] approximiert die rationale Übertragungsfunktion des Ausgangssystems (1) durch eine rationale Übertragungsfunktion, wobei nur halb so viele Momente wie bei dem oben beschriebenen Ansatz in den beiden Übertragungsfunktionen übereinstimmen. Die so ungenutzten Freiheitsgrade in der Approximation werden genutzt, um für passive RLC-Netzwerke ein passives reduziertes Modell zu erzeugen. Dieses Verfahren basiert auf dem Arnoldi-Verfahren [22]. In (2) wird $V = W$ gewählt und die Projektionsmatrix V wird im wesentlichen berechnet als spezielle Basis eines Block-Krylov-Raums. Das reduzierte Modell ist von der gewählten Netzwerk-Formulierung abhängig. In [23] wird ebenfalls die Idee, nicht maximal viele Momente der Übertragungsfunktionen übereinstimmend zu wählen, ausgenutzt, um ein passivitätserhaltendes Verfahren für Single-Input-Single-Output-Systeme zu erhalten. SPRIM [24] ist eine Modifikation von PRIMA, bei welcher die speziellen auftretenden, durch die RLC-Struktur bedingten Matrixstrukturen ausgenutzt werden.

Nachteil aller bisher erwähnter Verfahren ist, dass keine berechenbare Fehler-schranken zur Verfügung stehen. Die Anwendung der Verfahren ist damit nicht nur auf gewisse Spezialfälle beschränkt, sondern erfordert darüberhinaus auch die Entwicklung guter Heuristiken, um einen automatischen Abruf der Berechnungen zu garantieren.

Es existieren zahlreiche weitere Ansätze zur passivitätsrehaltenden Modellreduktion, welche nur für gewisse Spezialfälle entwickelt wurden. Dazu gehören z.B. der Laguerre-SVD-Ansatz [25], der ebenfalls mit Hilfe von Krylovraum-Methoden eine reduziertes Modell berechnet, welches gut in einem Frequenzband approximiert.

3 Struktur-erhaltendes Krylovraum-Verfahren

Im Folgenden werden nur noch lineare zeitinvariante Systeme (1) mit den folgenden Eigenschaften betrachtet:

1. A ist stabil,
2. Σ ist beobachtbar und steuerbar,
3. $D_+ = D + D^T$ ist symmetrisch positiv definit,
4. Σ ist passiv.

Da Σ passiv ist, muß die zugehörige Übertragungsfunktion positiv reell sein, m.a.W., $G(s)$ ist analytisch und $G(s) + (G(s))^H \geq 0$ für $\text{Re}(s) > 0$. Die letzte Eigenschaft impliziert hier die Existenz einer stabilen rationalen Matrix-wertigen Funktion $W(s)$ mit $G(s) + G^T(-s) = W(s)W^T(-s)$. Dies ist eine Spektralzerlegung von G . W wird daher spektraler Faktor von G genannt, die Nullstellen von W , d.h., $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ mit $\det W(\lambda_i) = 0$, die spektralen Nullstellen von G ; siehe z.B. [26]. Die Menge aller spektralen Nullstellen bezeichnen wir mit

$$\mathcal{S}_G := \{\lambda \mid \det W(\lambda) = 0\}.$$

Angenommen, man hätte ein ordnungsreduziertes Modell $\hat{\Sigma}$ (2) erhalten. Sei $\hat{G}(s) = \hat{D} + \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B}$ die reduzierte Übertragungsfunktion. Antoulas zeigt in [27] für den hier betrachteten Fall, dass dies ein passives reduziertes System ist, wenn einige der spektralen Nullstellen des Ausgangssystems im reduzierten System erhalten werden.

Satz 1 [27] *Falls $\mathcal{S}_{\hat{G}} \subset \mathcal{S}_G$, und \hat{G} ist eine rational interpolierende Funktion minimalen Grads mit $\hat{G}(\lambda) = G(\lambda)$ für alle $\lambda \in \mathcal{S}_{\hat{G}}$, dann ist $\hat{\Sigma}$ sowohl stabil als auch passiv.*

Die Menge \mathcal{S}_G der spektralen Nullstellen entspricht gerade der Menge der (endlichen) Eigenwerte von

$$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E} = \begin{bmatrix} A & & B \\ & -A^T & -C^T \\ C & B^T & D + D^T \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Diese Beobachtung nutzt Sorensen in [28] aus, um ein reduziertes Modell über die Kenntniss einiger Eigenwerte und des zugehörigen invarianten Unterraums des Matrixpaars $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ zu berechnen. Dazu sei angenommen, dass eine partielle reelle verallgemeinerte Schur-Zerlegung von $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ berechnet worden ist, d.h. es sind zwei reelle $(2n + p) \times \ell$ Matrizen U und Q mit orthonormalen Spalten ($U^T U = Q^T Q = I$) bekannt, so dass $U^T \mathcal{A} Q = F$ eine $\ell \times \ell$ quasi-Dreiecksmatrix

und $U^T \mathcal{E}Q = T$ eine $\ell \times \ell$ Dreiecksmatrix ist. Hierbei versteht man unter einer Dreiecksmatrix T eine quadratische Matrix, deren Elemente unterhalb der Diagonalen alle Null sind, $t_{ij} = 0$ für $i > j$. Eine quasi-Dreiecksmatrix kann zusätzliche noch einige Nichtnull-Einträge auf der Nebendiagonale haben, $t_{i+1,i} \neq 0$ für einige i . Zusätzlich gelte, dass alle Eigenwerte von (F, T) positiven Realteil haben. Eine solche Zerlegung existiert immer und kann für kleine Matrixdimensionen leicht mittels Standardsoftware (z.B. MATLAB's 'eig') berechnet werden.

Da alle Eigenwerte von (F, T) positiven Realteil haben, ist T regulär. Wegen $AQ = UF$, $\mathcal{E}Q = UT$ folgt $\mathcal{E}QT^{-1} = U$ und

$$AQ = \mathcal{E}QT^{-1}F =: \mathcal{E}QR,$$

wobei R eine reelle $\ell \times \ell$ quasi-Dreiecksmatrix ist mit $\text{Re}(\lambda) > 0$ für alle Eigenwerte λ von R . Schreibt man nun $Q^T = [X^T, Y^T, Z^T]$ mit derselben Blockstruktur wie A , dann gilt

$$\begin{bmatrix} A & & B \\ & -A^T & -C^T \\ C & B^T & D_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & & \\ & I & \\ & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} R, \quad (6)$$

wobei X und Y reelle $n \times \ell$ Matrizen, Z eine reelle $p \times \ell$ Matrix sind. Berechnet man nun die Singulärwertzerlegung [2] von

$$X^T Y = Q_x E^2 Q_y^T,$$

wobei Q_x und Q_y orthogonale $\ell \times \ell$ und E^2 eine reelle $\ell \times \ell$ Diagonalmatrix mit nichtnegativen Diagonaleinträgen ist und setzt

$$V = X Q_x E^{-1}, \quad W = Y Q_y E^{-1},$$

dann ist das projizierte System

$$\hat{A} = W^T A V, \quad \hat{B} = W^T B, \quad \hat{C} = C V, \quad \hat{D} = D$$

stabil und passiv [28].

Für Probleme kleiner bis mittlerer Größe können A und \mathcal{E} tatsächlich aufgestellt und die benötigte partielle verallgemeinerte Schur-Zerlegung kann mit dem QZ -Algorithmus berechnet werden. Für große dünnbesetzte Systeme, wie sie z.B. in der Schaltkreissimulation auftreten, ist dies nicht praktikabel. Hier ist ein iteratives Verfahren zur Berechnung einer gewünschten Menge von Eigenwerten und zugehörigen Eigenvektoren (oder dem zugehörigen invarianten Unterraum) angemessener. Sorensen schlägt daher in [28] ein Vorgehen vor, welches diese Berechnung mittels des impliziten neugestarteten Arnoldi-Verfahrens [29] (implementiert als MATLAB's `eigs` und als ARPACK in Fortran [30]) durchführt.

Die skizzierten Berechnungen lassen sich im Aufwand erheblich reduzieren. Die Gleichungen (6) besagen

$$AX + BZ = XR, \quad (7)$$

$$-A^T Y - C^T Z = YR, \quad (8)$$

$$CX + B^T Y + D_+ Z = 0. \quad (9)$$

Aus (9) folgt $Z = -D_+^{-1}\{CX + B^T Y\}$, da D_+ symmetrisch positiv definit ist (siehe Voraussetzung 3 zu Beginn dieses Abschnitts). Einsetzen dieses Ausdrucks in (7), (8) ergibt

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A - BD_+^{-1}C & -BD_+^{-1}B^T \\ C^T D_+^{-1}C & -(A - CD_+^{-1}B)^T \end{bmatrix}}_{\mathcal{H}} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} R.$$

\mathcal{H} kann geschrieben werden als

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{G} \\ \tilde{Q} & -\tilde{A}^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

mit $\tilde{G} = \tilde{G}^T$ und $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T$. Offenbar sind alle Eigenwerte von \mathcal{H} auch Eigenwerte von $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$. Daher kann statt der partiellen verallgemeinerten Schur-Zerlegung $\mathcal{A}Q = \mathcal{E}QR$ die partielle Schur-Zerlegung $\mathcal{H}S = S\Lambda$, berechnet werden, wobei S eine reelle $2n \times \ell$ Matrix und Λ eine reelle $\ell \times \ell$ Matrix mit denselben Eigenwerten wie R ist.

Jede Matrix, die wie \mathcal{H} eine Blockform (10) mit $\tilde{G} = \tilde{G}^T$ und $\tilde{Q} = \tilde{Q}^T$ besitzt, heißt Hamiltonische Matrix. Hamiltonische Matrizen haben zahlreiche interessante Eigenschaften, die es erlauben, effiziente, numerisch robuste Verfahren zur Eigenwertberechnung dieser Matrixklasse zu entwickeln. So ist für einen reellen oder rein imaginären Eigenwert λ einer reellen Hamiltonischen Matrix immer auch $-\lambda$ ein Eigenwert. Komplexe Eigenwerte treten gar in Quadrupeln $\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$ auf. (Diese Eigenschaft der Eigenwerte von \mathcal{H} gilt selbstverständlich auch für die endlichen Eigenwerte von $(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ und damit für die spektralen Nullstellen \mathcal{S}_G . Wie man leicht sieht, gilt für jedes $\lambda \in \mathcal{S}_G$ gerade $-\bar{\lambda} \in \mathcal{S}_G$, da aus $\mathcal{A}u = \lambda \mathcal{E}u$ folgt $\tilde{u}^T \mathcal{A} = -\bar{\lambda} \tilde{u}^T \mathcal{E}$, wobei $u^T = [x^T, y^T, z^T]$ und $\tilde{u}^T = [y^T, -x^T, z^T]$.)

Standardverfahren zur Eigenwertberechnung erhalten in ihren Berechnungsschritten die Hamiltonische Form der Matrix nicht und berechnen daher aufgrund von unvermeidbaren Rundungsfehlern nicht exakt Paare oder Quadrupel von Eigenwerten. Zudem kann die Konvergenz dieser Verfahren leiden, da oft Konvergenz gegen den betragsgrößten Eigenwert zu erwarten ist, es hier aber u.U. vier betragsgrößte geben kann. Diese Problematik wird durch spezielle Eigenwertverfahren, welche in jedem Berechnungsschritt die Hamiltonische Form der Matrix erhalten behoben. Für Hamiltonische Eigenwertproblem kleiner bis mittlerer Dimension bieten sich spezielle strukturerhaltende Algorithmen wie [31, 32, 33], für

höher dimensionale Probleme das symplektische Lanczos-Verfahren für Hamiltonische Matrizen [34], ein strukturerhaltendes Krylovraum-Verfahren zur Lösung an.

Zur Vereinfachung der folgenden Darstellung sei angenommen, dass $p = 1$ gelte; das System (1) sei also ein Single-Input-Single-Output-System. Bei dem Standard-Lanczos-Verfahren für unsymmetrische Matrizen erzeugt man die zur Projektion des Originalsystems auf eine kleineres System benötigten Matrizen $V = [v_1, v_2, \dots, v_\ell]$ und $W = [w_1, w_2, \dots, w_\ell]$ in geeigneter Weise als Basen der sogenannten Krylov-Unterräume

$$\begin{aligned}\kappa_\ell(\mathcal{H}, x) &= \text{span}\{x, \mathcal{H}x, \mathcal{H}^2x, \dots, \mathcal{H}^{\ell-1}x\} \\ &= \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_\ell\} \\ \kappa_\ell(\mathcal{H}^T, y) &= \text{span}\{y, \mathcal{H}^T y, (\mathcal{H}^T)^2 y, \dots, (\mathcal{H}^T)^{\ell-1} y\} \\ &= \text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_\ell\},\end{aligned}$$

mit $W^T V = I$. Dazu lassen sich kurze Rekursionsvorschriften zur spaltenweisen Berechnung der Matrizen V und W angeben. Wählt man hier die Matrix V symplektisch, d.h. $V^T J V = J$ für

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

so lässt sich aufgrund der Hamiltonischen Struktur von \mathcal{H} zeigen, dass W nicht explizit berechnet werden muss. W ergibt sich direkt aus der Matrix V , daher muss nur eine Rekursion für V , nicht zwei wie im allgemeinen Fall, aufgestellt und berechnet werden. Neben dieser Halbierung im Berechnungsaufwand besitzt dieser Ansatz weitere vorteilhafte Eigenschaften, die eine schnellere, effizientere und genauere Berechnung des reduzierten Modells erlauben als die Anwendung des Standard-Lanczos-Verfahrens. Eine detaillierte Beschreibung des hier erläuterten Ansatzes findet man in [35]. Leider existiert für diesen Ansatz, wie für alle auf Krylovraum-Verfahren basierenden Modellreduktionsmethoden, keine globale Fehlerschranke. Zudem erfordert das Verfahren die Wahl der Interpolationspunkte, d.h., der spektralen Nullstellen, bzw. der Eigenwerte von \mathcal{H} . Bisher beruht diese Wahl auf der Intuition des Anwenders, eine automatische, mathematisch begründete Wahl ist Gegenstand der aktuellen Forschung. Trotz allem erhält man mit diesem Ansatz sehr gute Ergebnisse.

4 Positiv reelles Balancieren

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Verfahren besitzt im Gegensatz zu dem Verfahren des letzten Abschnitts eine globale Fehlerschätzung, mit deren Hilfe der Ablauf des Verfahrens vollständig automatisiert werden kann. Wir werden hier lediglich die Grundidee des Verfahrens vorstellen. Effiziente Algorithmen für

moderat große Probleme werden in [36] vorgestellt, während der Fall sehr großer Systeme mit dünnbesetzter Matrix A in [37] behandelt wird.

Die Grundidee des Verfahrens des balancierten Abschneidens lässt sich wie folgt beschreiben: Betrachtet man das System Σ für die Impulsfunktion δ als Eingang $u = \delta$, so ergibt sich als Ausgang die Impulsantwort $h(t) = Ce^{At}B, t \geq 0$. Dies kann in eine Eingangs-zu-Zustandsabbildung $x(t) = e^{At}B$ und einen Zustands-zu-Ausgangsabbildung $\eta(t) = Ce^{At}$ zerlegt werden; d.h. der Eingang $\delta(t)$ erzeugt den Zustand $x(t)$, während die Anfangsbedingung $x(0)$ den Ausgang $y(t) = \eta(t)x(0)$ erzeugt. Die zu x und η gehörenden Gram'schen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} P &= \sum_t x(t)x(t)^* = \int_0^\infty e^{At}BB^*e^{A^*t}dt, \\ Q &= \sum_t \eta(t)^*\eta(t) = \int_0^\infty e^{A^*t}C^*Ce^{At}dt. \end{aligned}$$

Die Wurzeln aus den Eigenwerten von PQ , genannt Hankel-Singulärwerte von Σ , sind Systeminvarianten, denn bei einer Zustandstransformation $\check{x} = Tx$ werden die beiden Gram'schen durch eine Kongruenztransformation transformiert:

$$\check{P} = TPT^T, \quad \check{Q} = T^{-T}QT^{-1},$$

die Eigenwerte von $\check{P}\check{Q} = TPT^TT^{-T}QT^{-1} = TPQT^{-1}$ sind dieselben wie die von PQ .

Die Gram'schen P und Q sind gerade die eindeutigen Hermiteschen positiv definiten Lösungen der folgenden beiden Lyapunov-Gleichungen

$$AP + PA^T + BB^T = 0, \quad A^TQ + QA + CC^T = 0. \quad (11)$$

Numerisch stabile Algorithmen zur Lösung dieser Gleichungen sind bekannt. Diese liefern nicht die Lösungen P und Q , sondern eine obere Dreiecksmatrix U und eine untere Dreiecksmatrix L mit $UU^T = P$ und $LL^T = Q$. Die Hankel-Singulärwerte können dann als die singulären Werte des Produkts U^TL bestimmt werden, ohne das Produkt U^TL explizit zu berechnen. Bezeichnet man die Singulärwertzerlegung von U^TL mit

$$U^TL = ZSY^T, \quad (12)$$

wobei Z und Y orthogonale Matrizen und S eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Diagonaleinträgen ist. Führt man nun eine Zustandstransformation $\check{x} = T_b x$ mit

$$T_b = S^{\frac{1}{2}}Z^TU^{-1} \quad (13)$$

durch, so erhält man

$$A_b S + SA_b^T + B_b B_b^T = 0, \quad A_b^T S + SA_b + C_b^T C_b, \quad (14)$$

wobei $A_b = T_b A T_b^{-1}$, $B_b = T_b B$, $C_b = C T_b^{-1}$. Unter dieser Transformation werden die Gram'schen identisch und diagonal: $P = Q = S = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. Man nennt ein solches System balanciert.

Modellreduktion ist nun mittels simplem Abschneiden der kleinen Hankel-Singulärwerte möglich. Dazu sei angenommen, dass die Hankel-Singulärwerte so angeordnet sind, dass $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_\ell \geq \sigma_{\ell+1} \geq \dots \geq \sigma_n$. Nun schreibt man S als $S = \text{diag}(S_1, S_2)$, mit $S_1 = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_\ell)$ und zerlegt A_b, B_b und C_b in eine entsprechende Blockstruktur

$$A_b = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B_b = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad C_b = [C_1 \quad C_2],$$

so dass $\hat{A} := A_{11}$ eine reelle $\ell \times \ell$, $\hat{B} = B_1$ eine reelle $\ell \times p$ und $\hat{C} := C_1$ eine reelle $p \times \ell$ Matrix sind. Für das reduzierte System

$$\hat{\Sigma} : \dot{\hat{x}}(t) = \hat{A}\hat{x}(t) + \hat{B}u(t), \quad \hat{y}(t) = \hat{C}\hat{x}(t) + Du(t) \quad (15)$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$\sigma_\ell \leq \|\Sigma - \hat{\Sigma}\|_{H_\infty} \leq 2(\sigma_{\ell+1} + \sigma_{\ell+2} + \dots + \sigma_n).$$

Die \mathcal{H}_∞ -Norm $\|\Sigma\|_{H_\infty}$ eines Systems Σ ist dabei definiert als die höchste Ausschlag des Frequenzgangs, d.h. es ist der größte singuläre Wert der Übertragungsfunktion ausgewertet auf der imaginären Achse.

Die skizzierte Form des balancierten Abschneidens erhält leider nicht die Passivität des Systems. Dies garantiert das verwandte positiv-reelle Balancieren (PRB) [38, 39, 40]. Statt der beiden Lyapunov-Gleichungen (11) betrachtet man hierbei die folgenden beiden positiv-reellen algebraischen Riccati-Gleichungen

$$0 = \check{A}P + P\check{A}^T + PC^T D_+^{-1} C P + B D_+^{-1} B^T, \quad (16)$$

$$0 = \check{A}^T Q + Q\check{A} + Q B D_+^{-1} B^T Q + C^T D_+^{-1} C. \quad (17)$$

wobei $\check{A} := A - B D_+^{-1} C$, $D_+ = D + D^T$ sei. Alle Lösungen P und Q dieser Gleichungen liegen zwischen zwei Extremallösungen, $0 < P_{\min} \leq P \leq P_{\max}$, $0 < Q_{\min} \leq Q \leq Q_{\max}$. Für symmetrische positiv definite Lösungen $P = P^T > 0$ von (16) gilt zudem, dass $Q = P^{-1}$ eine Lösung von (17) ist. Die gesuchten symmetrisch positiv definiten Lösungen P_{\min}, Q_{\min} sind gerade die eindeutigen stabilisierenden Lösungen dieser Gleichungen. Zu deren Berechnung verwendet man numerisch zuverlässige Algorithmen, welche nicht die Lösungen P_{\min} und Q_{\min} liefern, sondern Matrizen U und L mit $U U^T = P_{\min}$ und $L L^T = Q_{\min}$, wobei verschiedene Varianten solcher Zerlegungen verwendet werden können. Über die Singulärwertzerlegung von $U^T L = Z S Y^T$ wie in (12) erhält man eine Transformation T_b (13) und somit ein transformiertes System (14). Dieses reduzierte System ist positiv-reell balanciert, d.h. das System wurde in eines überführt, für das

$$P_{\min} = Q_{\min} = S = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$$

gilt. Wie oben erläutert, ergibt sich das reduzierte Modell (15), welches passiv und stabil ist. Falls $\|G\|_{H_\infty} \gg \|D\|_2$ ist, so gilt hier die relative Fehlerschätzung

$$\begin{aligned} \frac{\|G - \hat{G}\|_{H_\infty}}{\|G\|_{H_\infty}} &\approx \frac{\|G - \hat{G}\|_{H_\infty}}{\|G + D^T\|_{H_\infty}} \\ &\leq 2\|D_+\|_2^2 \|\hat{G} + D^T\|_{H_\infty} \sum_{k=r+1}^n \mu_k. \end{aligned}$$

Eine ausführliche Beschreibung der numerischen Lösung dieses Ansatz findet man in [36]. Eine Anwendung auf allgemeinere Systeme der Form

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

mit einer singulären Matrix E ist ebenfalls möglich, siehe auch [41].

5 Numerisches Beispiel

Zur Demonstration der Qualität reduzierter Modelle, die mit Hilfe des positiv reellen Abschneidens berechnet werden können, verwenden wir ein Beispiel aus der Schaltkreissimulation. Das verwendete System wird zur Modellierung einer integrierten RF Induktionsspule verwendet und basiert auf einer PEEC (partial element equivalent circuit) Approximation der magneto-quasistatischen Maxwellgleichungen. Eine detaillierte Beschreibung des Modells findet man in [42]. Für die Modellreduktion stellt sich hier hauptsächlich die Aufgabe, neben der Approximation des Frequenzgangs bei niedrigen Frequenzen auch die durch den Skin-Effekt entstehende Flanke nachzubilden. Die Zustandsraumdimension des verwendeten Modells ist $n = 1434$. Es handelt sich um ein passives System mit einem Eingang und einem Ausgang. Da das System nicht strikt passiv ist, war zur Anwendung des positiv reellen Abschneidens eine Regularisierung mit Hilfe einer künstlichen Matrix erforderlich, wobei diese hier als $D = 10^{-5}$ gewählt wurde. Diese Regularisierung hat wegen

$$\begin{aligned} G(s) - \hat{G}(s) &= C(sI - A)^{-1}B - \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} \\ &= (C(sI - A)^{-1}B + D) - (\hat{C}(sI - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}) \end{aligned}$$

keinen Einfluß auf den absoluten Fehler.

Das reduzierte Modell der Ordnung $\ell = 20$ wurde mit einer einfachen MATLAB-Implementierung des in Abschnitt 4 vorgestellten Verfahrens berechnet, wobei die algebraischen Riccatigleichungen mit dem Newton-Verfahren aus [43] gelöst wurden. Die berechneten Faktoren von P_{\min}, Q_{\min} haben Rang 34 bzw. 41, so daß nur eine Singulärwertzerlegung einer 34×41 Matrix berechnet werden mußte. In Abbildung 1 sieht man, daß der Frequenzgang des reduzierten Modells nicht von dem des Originalmodells unterschieden werden kann und daß die Flanke perfekt nachgebildet wird. Der absolute Fehler ist in Abbildung 2 dargestellt; man

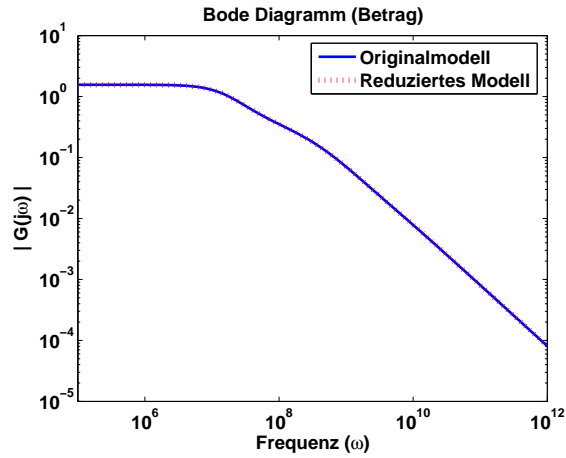


Abbildung 1: Frequenzgang für das Originalmodell ($n = 1434$) und das reduzierte Modell ($\ell = 20$) der Induktionsspule.

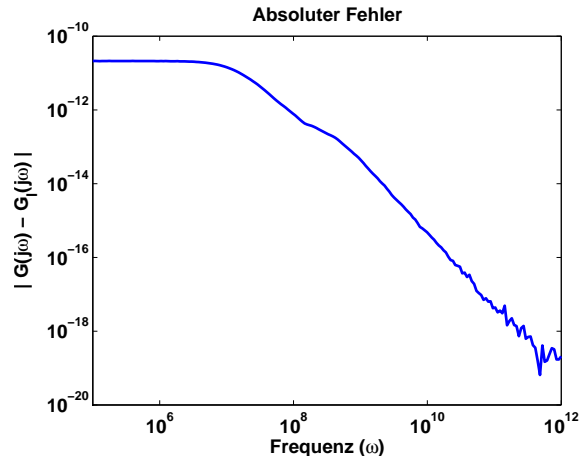


Abbildung 2: Absoluter Fehler des reduzierten Modells der Induktionsspule.

erkennt, daß dieser Fehler im betrachteten Frequenzspektrum kleiner als 10^{-10} ist.

Numerische Beispiele zum Ansatz aus Abschnitt 3 sind in [35] zu finden.

6 Ausblick

Die Modellreduktion linearer passiver Systeme, die in der letzten Dekade hauptsächlich durch Anwendungen aus der Schaltkreissimulation vorangetrieben wurde, kann mit Hilfe verschiedener in diesem Artikel vorgestellter Verfahren erfolgen. Neben der schon erwähnten noch zu lösenden Problemen wird zukünftig

untersucht werden, ob und wie sich diese Methoden auf die Modellreduktion nichtlinearer passiver Systeme anwenden lassen.

Literatur

- [1] A.C. Antoulas. *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. SIAM Publications, Philadelphia, 2005.
- [2] G.H. Golub, C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. John Hopkins University Press, Baltimore, 3rd edition, 1996.
- [3] K. Glover. *Optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L-infinity-error bounds*. Int. J. Control 39, S. 1115-1193, (1984).
- [4] B. C. Moore. *Principal component analysis in linear system: controllability, observability and model reduction*. IEEE Transactions on Automatic Control AC-26, S. 17-32, 1981.
- [5] Y. Liu, B. D. O. Anderson. *Singular perturbation approximation of balanced systems*. Int. J. Control 50, S. 1379-1405, 1989.
- [6] S. Gugercin, A.C. Antoulas. *A survey of model reduction by balanced truncation and some new results*. International Journal of Control 77(8), S. 748-766, 2004.
- [7] P. Benner. *Solving large-scale control problems*. IEEE Control Systems Magazine, 14(1), S. 44-59, 2004.
- [8] P. Benner. *Numerical linear algebra for model reduction in control and simulation*. Erscheint in GAMM Mitteilungen.
- [9] R. W. Freund. *Model reduction methods based on Krylov subspaces*. Acta Numerica 12, S. 267-319, 2003.
- [10] B. Lohmann, B. Salimbahrami. *Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden*. Automatisierungstechnik 52, S. 30-38, 2004.
- [11] P. Feldmann, R. W. Freund. *Efficient linear circuit analysis by Padé approximation via the Lanczos process*. IEEE Trans. Computer-Aided Design 14, S. 639-649, 1995.
- [12] E. J. Grimme. *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. PhD Thesis, ECE Department, U. of Illinois, Urbana-Champaign, 1997.

- [13] J.C. Willems. *Dissipative dynamical systems, Part I: General Theory*. Arch. Rational Mech. Anal. 45, S. 321-351, 1972.
- [14] A. Kugi, K. Schlacher. *Analyse und Synthese nichtlinearer dissipativer Systeme: Ein Überblick*. Automatisierungstechnik 50, S. 63-69, 103-111, 2002.
- [15] N.E. Barabanov, A.Kh. Gelig, G.A. Leonov, A.L. Likhtarnikov, A.S. Matveev, V.B. Smirnova, A.L. Fradkov. *The frequency theorem (Kalman-Yakubovich lemma) in control theory*. Automat. Remote Control 57, S. 1377-1407, 1996.
- [16] C. Lanczos. *An iteration method for the solution of the eigenvalue problem of linear differential and integral operators*. J. Res. Nat. Bur. Standards 45, S. 255-282, 1950.
- [17] R. Freund, P. Feldmann. *Reduced-order modeling of large passive linear circuits by means of the SyPVL algorithm*. In Tech. Dig. 1996 IEEE/ACM Intl. Conf. CAD, IEEE Computer Society Press, S. 280-287, 1996.
- [18] R. Freund, P. Feldmann. *Interconnect-delay computation and signal-integrity verification using the SyMPVL algorithm*. In Proc. 1997 European Conf. Circuit Theory and Design, European Circuit Society, S. 408-413, 1997.
- [19] R. Freund, P. Feldmann. *Reduced-order modeling of large linear passive multi-terminal circuits using matrix-Padé approximation*. In Proc. of DATE'98, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, California, S. 530-537, 1998.
- [20] Z. Bai, P. Feldmann, R. Freund. *Stable and passive reduced-order models based on partial Padé approximation via the Lanczos process*. Numerical Analysis Manuscript No. 97-3-10, Bell Laboratories, Murray Hill, New Jersey, 1997.
- [21] A. Odabasioglu, M. Celik, L.T. Pileggi. *PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm*. In Tech. Dig. 1997 IEEE/ACM Intl. Conf. CAD, IEEE Computer Society Press, S. 58-65, 1997.
- [22] W.E. Arnoldi. *The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem*. Quart. Appl. Math. 9, S. 17-29, 1951.
- [23] Z. Bai, R. Freund. *A partial Padé-via-Lanczos method for reduced-order modeling*. Linear Algebra Appl. 332-334, S. 139-164, 2001.
- [24] R. Freund. *SPRIM: Structure-Preserving Reduced-Order Interconnect Macromodeling*, In Tech. Dig. 2004 IEEE/ACM Intl. Conf. CAD, IEEE Computer Society Press, S. 80-87, 2004.

- [25] P. Heres, W. Schilders. *Reduced order modelling of RLC-networks using an SVD-Laguerre based method*. In Scientific computing in electrical engineering. Proc. SCEE 2002 Conf., Eindhoven, The Netherlands, June 23-28, 2002, Hrsg.: W. Schilders et al., Springer-Verlag, Berlin, S. 223-230, 2004.
- [26] K. Zhou, J.C. Doyle, K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, New Jersey, 1996.
- [27] A.C. Antoulas. *A new result on positive real interpolation and model reduction*. Systems & Control Letters 54, S. 361-374, 2005.
- [28] D.C. Sorensen. *Passivity preserving model reduction via interpolation of spectral zeros*. Systems & Control Letters 54, S. 347-360, 2005.
- [29] D.C. Sorensen. *Implicit application of polynomial filters in a k-step Arnoldi method*. SIAM J. Matrix Anal. Applic. 13, S. 357-385, 1992.
- [30] R. Lehoucq, D.C. Sorensen and C. Yang. *ARPACK users guide: Solution of Large Sparse Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi methods*. SIAM Publications, Philadelphia, 1998 (software available at <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK>).
- [31] A. Bunse-Gerstner, V. Mehrmann. *A symplectic QR-like algorithm for the solution of the real algebraic Riccati equation*. IEEE Trans. Automat. Control AC-31, S.1 104-1113, 1986.
- [32] P. Benner, V. Mehrmann, H. Xu. *A Numerically Stable, Structure Preserving Method for Computing the Eigenvalues of Real Hamiltonian or Symplectic Pencils*. Numerische Mathematik 78(3), S. 329-358, 1998.
- [33] P. Benner, D. Kressner. *Algorithm 8xx: Fortran 77 Subroutines for Computing the Eigenvalues of Hamiltonian Matrices II*. Erscheint in ACM Transactions on Mathematical Software.
- [34] P. Benner, H. Faßbender. *An implicitly restarted symplectic Lanczos method for the Hamiltonian eigenvalue problem*. Linear Algebra Appl. 263, S. 75-111, 1997.
- [35] P. Benner, H. Faßbender. *Computing passive reduced-order LTI models using structured Krylov subspace methods*. Preprint TU Braunschweig, 2006.
- [36] P. Benner, E.S. Quintana-Ortí, G. Quintana-Ortí. *Computing passive reduced-order models for circuit simulation*. In Proc. Intl. Conf. Parallel Comp. in Elec. Engrg. PARELEC 2004, S. 146-151. IEEE Computer Society, 2004.

- [37] P. Benner. *Passivitätserhaltende Modellreduktion mit Balancierungstechniken*. In Tagungsband GMA FA 1.30, Workshop Bostalsee, 28.-30.9.2005, S. 152-168, 2005.
- [38] B.D.O. Anderson. *An algebraic solution to the spectral factorization problem*. IEEE Trans. Automat. Control AC-12, S. 410-414, 1967.
- [39] M. Green. *Balanced stochastic realizations*. Linear Algebra Appl. 98, S. 211-247, 1987.
- [40] R. Ober. *Balanced parametrizations of classes of linear systems*. SIAM J. Cont. Optim. 29, S. 1251-1287, 1991.
- [41] J.R. Phillips, L. Daniel, L.M. Silveira. *Guaranteed Passive Balancing Transformations for Model Order Reduction*. IEEE Trans. CAD Integrated Circuits Syst. 22(8), 2003.
- [42] J.-R. Li and M. Kamon. PEEC model of a spiral inductor generated by Fasthenry. In P. Benner, V. Mehrmann, and D.C. Sorensen, editors, *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*, volume 45 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 373–377. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany, 2005.
- [43] P. Benner and R. Byers. *An exact line search method for solving generalized continuous-time algebraic Riccati equations*. IEEE Trans. Automat. Control, 43(1), S. 101-107, 1998.