

Kapitel III. Anwendungen.

¶9. Sobolev-Räume.

Sobolevräume sind Vektorräume von Funktionen aus L_p , deren Distributionsableitungen bis zur Ordnung $|\alpha| \leq k$ regulär sind und durch Funktionen aus L_p dargestellt werden. Die Sobolevräume sind eines der wichtigsten Hilfsmittel in der modernen Theorie der partiellen Differentialgleichungen (sowohl der elliptischen, der parabolischen, wie auch der hyperbolischen). Häufig werden die natürlichen Definitionsbereiche von Differentialoperatoren durch Sobolev-Räume gegeben.

Die einfachsten Vertreter sind diejenigen Sobolev-Räume, die auf ganz \mathbf{R}^m definiert sind und den Hilbertraum $L_2(\mathbf{R}^m)$ verwenden.

9.1. Definition und Satz. Für $k \in \mathbf{R}$ sei

$$W^k := W_2^k(\mathbf{R}^m) := \{T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m); \hat{T} \text{ ist meßbare Funktion mit } \int (1 + |\xi|^2)^k |\hat{T}(\xi)|^2 d\xi < \infty\}.$$

Wenn wir für $T \in W^k$

$$\|T\|_k := \left(\int_{\mathbf{R}^m} (1 + |\xi|^2)^k |\hat{T}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$$

definieren, dann ist W^k , versehen mit der Norm $\|\cdot\|_k$, ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle T, S \rangle_{W^k} = \int \hat{T}(\xi) \overline{\hat{S}(\xi)} (1 + |\xi|^2)^k d\xi, \quad T, S \in W^k(\mathbf{R}^m).$$

9.2. Bemerkung. Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz könnte man den Dualraum $(W^k)^*$ von W^k mit W^k selbst identifizieren: zu jedem $\ell \in (W^k)^*$ existiert (genau) ein $g \in W^k$ mit

$$\ell(f) = \langle f, g \rangle_{W^k}, \quad \forall f \in W^k,$$

und umgekehrt.

Da man hier die gesamte Skala W^k , $k \in \mathbf{R}$, zur Verfügung hat, zieht man es aber vor, $(W^k)^*$ mit W^{-k} zu identifizieren. Für $g \in W^{-k}$ ist

$$W^k \ni f \mapsto \int \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) d\xi \tag{9.1}$$

ein stetiges lineares Funktional. Man sieht leicht, daß $(W^k)^*$ und W^{-k} in der Tat (isometrisch) isomorph sind. (Betrachte dazu die gewichteten L_2 -Räume $L_2^{(k)}$ und $L_2^{(-k)}$ mit

$$L_2^{(k)} := \left\{ f: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{C} \text{ meßbar ; } \int (1 + |x|^2)^k |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Hier zeigt man direkt, daß $(L_2^{(k)})^*$ und $L_2^{(-k)}$ isometrisch isomorph sind; verwende anschließend die Fouriertransformation.)

Die in (9.1) getroffene Definition ist *natürlich*, denn für $T \in W^{-k}$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$T(\varphi) = T(\check{\varphi}) = \check{T}(\hat{\varphi}) = \int \hat{T}(-\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

9.3. Satz. Für $k \in \mathbf{N}$ gilt: Es ist $f \in W^k$ genau dann, wenn $D^\alpha f \in L_2(\mathbf{R}^m)$ ist für alle $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ mit $|\alpha| \leq k$ (dabei bezeichnet $D^\alpha f$ die Distributionsableitung von f).

Beweis. Für alle $T \in \mathcal{S}'$ gilt

$$\widehat{D^\alpha T} = (i\lambda)^\alpha \hat{T}, \quad \alpha \in \mathbf{N}_0^m. \quad (9.2)$$

Für $T \in W^k$ ist $(i\lambda)^\alpha \hat{T} \in L_2$ für $|\alpha| \leq k$; mit Plancherel und (9.2) folgt $D^\alpha T \in L_2$. Sei umgekehrt $D^\alpha T \in L_2$ für alle $|\alpha| \leq k$; dann folgt $(i\lambda)^\alpha \hat{T} = \widehat{D^\alpha T} \in L_2$ für alle $|\alpha| \leq k$, mithin $T \in W^k$. ■

9.4. Satz. Sei $k \in \mathbf{R}$ und sei $T \in W^k$. Dann ist der Gradient $\nabla T \in W^{k-1}$.

Beweis: Für $T \in W^k$ ist $\lambda_j(1 + |\lambda|^2)^{(k-1)/2}\hat{T} \in L_2$; da

$$(1 + |\lambda|^2)^{(k-1)/2} \left(\widehat{\partial_{x_j} T} \right) = -i\lambda_j(1 + |\lambda|^2)^{(k-1)/2}\hat{T},$$

ist $\frac{\partial}{\partial x_j} T \in W^{k-1}$. ■

Wenn k groß genug ist, so ist jede Distribution $T \in W^k$ schon eine stetige (oder stetig differenzierbare) Funktion. Dies wird im Sobolevschen Einbettungssatz präzisiert:

9.5. THEOREM. (Sobolev's Lemma, oder: der Sobolev'sche Einbettungssatz.)

Sei $T \in W^k$ mit einem $k > m/2$, und sei $\ell \in \mathbf{N}_0$ mit $\ell < k - m/2$.

Dann ist T eine Funktion der Klasse $C^\ell(\mathbf{R}^m)$ mit $D^\alpha T \in C_0(\mathbf{R}^m)$ für alle $|\alpha| \leq \ell$.

Beweis. $T \in W^k \implies (1 + |\lambda|^2)^{k/2}\hat{T} \in L_2$.

Nun ist die Fkt. $(1 + |\lambda|^2)^{-m/4-\varepsilon} \in L_2(\mathbf{R}^m)$, für alle $\varepsilon > 0$, und wir sehen, daß

$$G(\lambda) := (1 + |\lambda|^2)^{-m/4-\varepsilon}(1 + |\lambda|^2)^{k/2}\hat{T} \in L_1(\mathbf{R}^m)$$

gilt. Daher ergibt sich für $|\alpha| \leq \ell$

$$\begin{aligned} |\lambda^\alpha \hat{T}(\lambda)| &\leq |\lambda|^\ell |\hat{T}(\lambda)| \\ &= |\lambda|^\ell (1 + |\lambda|^2)^{m/4+\varepsilon} (1 + |\lambda|^2)^{-k/2} |G(\lambda)| \\ &\leq (1 + |\lambda|^2)^{\ell/2 - k/2 + m/4 + \varepsilon} |G(\lambda)|. \end{aligned}$$

Hierin können wir $\varepsilon > 0$ so klein wählen, daß $\ell < k - m/2 - 2\varepsilon$; dann ist

$$\lambda^\alpha \hat{T} \in L_1(\mathbf{R}^m), \quad |\alpha| \leq \ell.$$

Nach Riemann-Lebesgue ist zunächst

$$T(x) = (2\pi)^{-m/2} \int e^{i\lambda \cdot x} \hat{T}(\lambda) d\lambda$$

eine beschränkte, stetige Funktion, die bei ∞ verschwindet.

Sei nun $k - m/2 > 1$. Dann sieht man wie oben, daß

$$\mathbf{S}(x) := (2\pi)^{-m/2} \int e^{i\lambda \cdot x} (i\lambda) \hat{T}(\lambda) d\lambda$$

eine Funktion aus $C_0(\mathbf{R}^m)^m$ ist. Für $0 \neq h \in \mathbf{R}^m$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|h|} (T(x+h) - T(x) - h \cdot \mathbf{S}(x)) \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int \left\{ \frac{1}{|h|} \left(e^{i\lambda \cdot (x+h)} - e^{i\lambda \cdot x} - i(\lambda \cdot h) e^{i\lambda \cdot x} \right) \right\} \cdot \hat{T}(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Wegen

$$e^{i\lambda \cdot (x+h)} = e^{i\lambda \cdot x} \sum_{n \geq 0} \frac{i^n}{n!} (\lambda \cdot h)^n = e^{i\lambda \cdot x} + i(\lambda \cdot h) e^{i\lambda \cdot x} + e^{i\lambda \cdot x} \sum_{n \geq 2} \frac{i^n}{n!} (\lambda \cdot h)^n$$

konvergiert die geschweifte Klammer in (9.3) punktweise in λ gegen 0 mit $|h| \downarrow 0$. Weiter ist nach dem MWS

$$\frac{1}{|h|} \left| e^{i\lambda \cdot (x+h)} - e^{i\lambda \cdot x} \right| \leq |\lambda|,$$

sowie

$$\frac{1}{|h|} |i(\lambda \cdot h) e^{i\lambda \cdot x}| \leq |\lambda|.$$

Da nach dem obigen $\hat{T} \in L_1$ und $|\lambda| \hat{T} \in L_1$ sind, erhalten wir für die Integranden auf der RS von (9.3) die integrable Majorante $2|\lambda| |\hat{T}(\lambda)|$, für $|h| \leq 1$. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue konvergiert daher die RS von (9.3) gegen 0 für $|h| \downarrow 0$. Wir sehen also $T \in C^1$ mit $\nabla T = \mathbf{S}$.

Da $|\lambda|^{|\alpha|} \hat{T} \in L_1(\mathbf{R}^m)$ ist, können wir diesen Prozeß ℓ -mal wiederholen und erhalten $T \in C^\ell$ mit $D^\alpha T \in C_0(\mathbf{R}^m)$ für $|\alpha| \leq \ell$. ■

9.6. Bemerkung. Für $\Omega \neq \mathbf{R}^m$ offen kann man die *lokalen* Sobolev-Räume $W_{\text{loc}}^k(\Omega)$ wie folgt definieren:

$$W_{\text{loc}}^k(\Omega) := \{T \in \mathcal{D}'(\Omega) ; \varphi T \in W^k(\mathbf{R}^m), \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}.$$

Hier zeigt man:

$$f \in W_{\text{loc}}^k(\Omega) \implies f \in C^\ell(\Omega), \quad \forall \ell \in \mathbf{N}_0 \text{ mit } \ell < k - m/2.$$

Der Laplace-Operator wirkt auf den Räumen W^k in der folgenden Weise:

9.7. Theorem. (Lemma von Weyl; elliptische Regularitätstheorie)
 Sei $T \in W^k$ und sei $-\Delta T \in W^k$, für ein $k \in \mathbf{R}$. Dann ist $T \in W^{k+2}$.

Beweis.

$$T \in W^k \implies (1 + |\lambda|^2)^{k/2} \hat{T} \in L_2$$

und

$$-\Delta T \in W^k \implies (1 + |\lambda|^2)^{k/2} |\lambda|^2 \hat{T} \in L_2.$$

Falls $T \in W^k$ und $-\Delta T \in W^k$ folgt daher

$$(1 + |\lambda|^2)^{k/2+1} \hat{T} \in L_2,$$

d.h., $T \in W^{k+2}$. ■

Aus der Verbindung von Weyl und Sobolev folgt sofort

9.8. Korollar. Für $T \in W^k$ mit $\Delta T \in W^k$ ist $D^\alpha T \in C_0(\mathbf{R}^m)$ für alle α mit $|\alpha| < k - m/2 + 2$.

Bemerkung zur lokalen Version des Weylschen Lemmas.

Bemerkung. Wir haben bisher nur eine ganz spezielle Klasse von Sobolevräumen diskutiert. Im allgemeinen geht man von den folgenden beiden Definitionen aus:

Definition A. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ offen, sei $k \in \mathbf{N}$ und sei $p \in [1, \infty]$. Den VR der Funktionen $f \in L_p(\Omega)$, die die Eigenschaft besitzen, daß die Distributionsableitungen $D^\alpha f \in L_p(\Omega)$ liegen für alle $|\alpha| \leq k$, bezeichnet man mit $W_p^k(\Omega)$, oder auch $W^{k,p}(\Omega)$. Alle W_p^k -Räume sind Banachräume.

Definition B. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ offen, sei $k \in \mathbf{N}$ und sei $p \in [1, \infty)$. Die Vervollständigung des Unterraums $C^\infty(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$ bzgl. der $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ -Norm bezeichnet man mit $H_p^k(\Omega)$.

Meyers und Serrin zeigten 1964, daß $H_p^k = W_p^k$ gilt für $1 \leq p < \infty$ und für alle $k \in \mathbf{N}$.

Definition C. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ offen, sei $k \in \mathbf{N}$ und sei $p \in [1, \infty)$. Die Vervollständigung von $C_c^\infty(\Omega)$ bzgl. der $\|\cdot\|_{W_p^k(\Omega)}$ -Norm bezeichnet man mit $H_o^{k,p}(\Omega)$.