¶9. Duale Operatoren.

9.1. Definition. Es seien X, Y normierte VRe, und es sei $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Der lineare Operator $T' : Y' \to X'$, definiert durch

$$T'\varphi := \varphi \circ T, \qquad \varphi \in Y', \tag{9.1a}$$

d.h.,

$$(T'\varphi)(x) = \varphi(Tx), \qquad \forall \varphi \in Y', \quad \forall x \in X, \tag{9.1b}$$

heißt *der zu T duale Operator* (oder: *die Adjungierte*). Es ist $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$; s.u.!

Notation mit dualer Paarung:

$$\langle Tx\,,\,\varphi\rangle_{Y,Y'} = \langle x\,,\,T'\varphi\rangle_{X,X'}\,, \qquad x \in X, \quad \varphi \in Y'. \tag{9.1c}$$

Bemerkungen.
(1) Wegen $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $\varphi \in \mathcal{B}(Y, \mathbf{C})$ ist in der Tat $T'\varphi = \varphi \circ T : X \to \mathbf{C}$ ein stetiges lineares Funktional, d.h., $T'\varphi \in X'$.
(2) Es ist

$$\begin{aligned}
\|T'\varphi\|_{X'} &=_{\text{Def}} \sup_{x\in X, \|x\|\le 1} |(T'\varphi)(x)| \\
&=_{(9.1)} \sup_{x\in X, \|x\|\le 1} |\varphi(Tx)| \\
&\le \sup_{\|x\|\le 1} \left(\|\varphi\|_{Y'}\ \|Tx\|_Y\right) \\
&\le \|\varphi\|_{Y'}\ \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \sup_{\|x\|\le 1} \|x\|_X \\
&= \|\varphi\|_{Y'}\ \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\,.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\|T'\|_{\mathcal{B}(Y',X')} \le \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\,. \tag{9.2}$$

(3) Für $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$ gilt

$$(S \circ T)' = T' \circ S' \in \mathcal{B}(Z', X'). \tag{9.3}$$

Beweis von (9.3): Sei $\psi \in Z'$, $\varphi := S'\psi = \psi \circ S \in Y'$. Dann:

$$T' \circ S'\psi = T'\varphi = \varphi \circ T = \psi \circ S \circ T = (S \circ T)'\psi.$$

(4) **Wiederholung:** Die kanonische Einbettung $J_X : X \hookrightarrow X''$:
Wir können X mittels einer kanonischen Abbildung isometrisch isomorph in X'' einbetten; insbesondere können wir X als Unterraum von X'' auffassen:
Dazu definieren wir eine lineare Abbildung J_X, die jedem Element $x \in X$ ein stetiges lineares Funktional auf X' durch *Transposition* zuordnet:

$$J_X(x) : X' \to \mathbf{C}, \qquad J_X(x)(\varphi) := \varphi(x), \quad \forall \varphi \in X'; \tag{3.12}$$

wir schreiben kurz

$$\tilde{x}(\varphi) := J_X(x)(\varphi). \tag{3.13}$$

Häufig verwendet man die folgende suggestive Schreibweise, die die *duale Paarung* hervorhebt:

$$\langle \tilde{x}\,,\,\varphi \rangle_{X'',X'} = \langle \varphi\,,\,x \rangle_{X',X}\,. \tag{3.14}$$

Wegen

$$|\tilde{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \le \|\varphi\|_{X'}\ \|x\|_X\,, \qquad \forall \varphi \in X', \tag{3.15}$$

ist $J_X(x) \in (X')'$. Genauer gilt:

3.21. Satz. *Die kanonische Abbildung*

$$J_X : X \to X'',$$

definiert durch

$$J_X(x) := \tilde{x}, \qquad \tilde{x}(\varphi) := \varphi(x), \quad \forall \varphi \in X',$$

ist eine isometrische Abbildung von X nach X''.

Bem.: X ist genau dann reflexiv, wenn J_X surjektiv ist. **Ende der Wiederholung.**

Seien J_X und J_Y die kanonischen Einbettungen

$$J_X : X \hookrightarrow X'', \qquad J_Y : Y \hookrightarrow Y''.$$

Für die "biduale" Abbildung $T'' := (T')'$ mit $T'' \in \mathcal{B}(X'', Y'')$ gilt dann

$$J_Y \circ T = T'' \circ J_X. \tag{9.4}$$

Wenn X zusätzlich reflexiv ist, dann ist $J_X\colon X \hookrightarrow X''$ bijektiv und wir können (9.4) schreiben als

$$T'' = J_Y \circ T \circ J_X^{-1}. \tag{9.5}$$

Beweis von (9.4). Für alle $x \in X$, $\varphi \in Y'$ ist (mit (3.12) und (9.1))

$$\begin{aligned}(J_Y(Tx))\,(\varphi) &=_{(3.12)} \varphi(Tx) =_{(9.1)} (T'\varphi)(x)\\ &=_{(3.12)} (J_X(x))(T'\varphi) = (T'' J_X(x))\,(\varphi);\end{aligned}$$

der letzte Schritt folgt mit (9.1) nach Substitution geeigneter Symbole: ersetze φ in (9.1) durch $J_X(x)$, x in (9.1b) durch φ, T durch T', T' durch T'' und Y' durch X''.
Derselbe Beweis in Notation mit $\langle .\,,\,. \rangle$:

$$\begin{aligned}\langle J_Y(Tx)\,,\,\varphi \rangle_{Y'',Y'} &= \langle Tx\,,\,\varphi \rangle_{Y,Y'}\\ &= \langle x\,,\,T'\varphi \rangle_{X,X'}\\ &= \langle J_X(x)\,,\,T'\varphi \rangle_{X'',X'}\\ &= \langle T'' J_X(x)\,,\,\varphi \rangle_{Y'',Y'}\,.\end{aligned}$$

9.2. Satz. $\|T'\| = \|T\|$.

Beweis. Wir haben bereits $\|T'\| \leq \|T\|$ gezeigt. Wegen

$$J_Y \circ T = T'' \circ J_X$$

ist andrerseits (beachte J_X und J_Y isometrisch!)

$$\begin{aligned} \|T\| &= \|J_Y \circ T\| \\ &= \|T'' \circ J_X\| \\ &\leq \|T''\| \, \|J_X\| \\ &= \|T''\| \,, \end{aligned}$$

mithin

$$\|T'\| \leq \|T\| \leq \|T''\| \leq \|T'\| \,.$$

∎

9.3. Satz. *Es seien X, Y BRe, und es sei $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Für den dualen Operator $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ gilt dann*

$$^{\perp}(\operatorname{Ran} T') = \operatorname{Ker} T, \qquad (\operatorname{Ran} T)^{\perp} = \operatorname{Ker} T'.$$

Bemerkung: Vergleiche mit Hilbertraum, Zusammenhang zwischen A und A^*.

Beweis. Für $\varphi \in Y'$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \in \ker T' &\Longleftrightarrow T'\varphi = 0 \\ &\Longleftrightarrow \langle x \,, \, T'\varphi \rangle_{X,X'} = 0, \quad \forall x \in X \\ &\Longleftrightarrow \langle Tx \,, \, \varphi \rangle_{Y,Y'} = 0, \quad \forall x \in X, \\ &\Longleftrightarrow \varphi \in (\operatorname{Ran} T)^{\perp}. \end{aligned}$$

∎

Wir ergänzen noch ¶5 (Resolvente und Spektrum) mit einem grundlegenden Satz über das Spektrum dualer Operatoren:

9.4. Theorem.
Sei X BR, $T \in \mathcal{B}(X)$ und $T' \in \mathcal{B}(X')$ der zu T duale Operator. Dann gilt

$$\sigma(T) = \sigma(T'), \qquad \varrho(T) = \varrho(T'), \qquad \left[(T - \lambda)^{-1}\right]' = (T' - \lambda)^{-1}, \quad \forall \lambda \in \varrho(T).$$

Dieser Satz von Phillips gilt analog für unbeschränkte Operatoren. Der folgende Beweis war nicht Teil der Vorlesung.

Beweis. ([K; p. 169], [Y; p. 224/25])
Es genügt, den Fall $\lambda = 0$ zu betrachten.
(1) Sei $0 \in \varrho(T)$. Dann ist $T\colon X \to Y$ bijektiv mit $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$. Dann ist $(T^{-1})' \in \mathcal{B}(X',Y')$. Für $\varphi \in Y'$, $v \in Y$ rechnen wir aus

$$\big\langle (T^{-1})'T'\varphi\,,\, v\big\rangle_{Y',Y} = \big\langle T'\varphi\,,\, T^{-1}v\big\rangle_{X',X} = \big\langle \varphi\,,\, TT^{-1}v\big\rangle_{Y',Y} = \langle \varphi\,,\, v\rangle_{Y',Y}\,;$$

also gilt $(T^{-1})'T'\varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in Y'$.
Andrerseits haben wir für $\xi \in X'$ und $u \in X$

$$\big\langle (T^{-1})'\xi\,,\, Tu\big\rangle_{Y',Y} = \big\langle \xi\,,\, T^{-1}Tu\big\rangle_{X',X} = \langle \xi\,,\, u\rangle_{X',X}\,,$$

also folgt $T'(T^{-1})'\xi = \xi$ für alle $\xi \in X'$. Die beiden so erzielten Gleichungen implizieren, daß T' injektiv und surjektiv ist und daß die Inverse mit $(T^{-1})'$ übereinstimmt.
(2) Sein nun umgekehrt $0 \in \varrho(T')$, d.h., $(T')^{-1} \in \mathcal{B}(X',Y')$. Für $\xi \in X'$ und $u \in X$ gilt dann

$$\big\langle (T')^{-1}\xi\,,\, Tu\big\rangle_{Y',Y} = \big\langle T'(T')^{-1}\xi\,,\, u\big\rangle_{X',X} = \langle \xi\,,\, u\rangle_{X',X}\,.$$

Zu jedem $u \in X$ gibt es aber nach Kor. 7.15 ein "tangentiales Funktional" $\xi \in X'$ mit $\|\xi\|_{X'} = 1$ und $\xi(u) = \|u\|$. Wenn wir in der vorangehenden Rechnung dieses ξ verwenden, so erhalten wir

$$\|u\| = \big\langle (T')^{-1}\xi\,,\, Tu\big\rangle_{Y',Y} \le \big\|(T')^{-1}\xi\big\|\,\|Tu\| \le \big\|(T')^{-1}\big\|\,\|\xi\|\,\|Tu\| = \big\|(T')^{-1}\big\|\,\|Tu\|\,.$$

Foglich ist T injektiv mit $\big\|T^{-1}\big\| \le \big\|(T')^{-1}\big\|$, wobei T^{-1} als Abbildung von $\mathrm{Ran}(T) \subset Y$ nach X zu verstehen ist. Da T^{-1} beschränkte Norm hat, ist das Bild $\mathrm{Ran}(T)$ abgeschlossen, und wir müssen nur noch zeigen, daß $\mathrm{Ran}(T)$ schon ganz Y ist. Dazu genügt es nun zu zeigen, daß es kein $0 \neq \varphi \in Y'$ gibt mit $\varphi(y) = 0$ für alle $y \in \mathrm{Ran}(T)$. Wegen T' invertierbar ist aber $\mathrm{Ker}(T') = \{0\}$ und mit Satz 9.3 folgt $\mathrm{Ran}(T)^\perp = \{0\}$. ∎

9.5. Bemerkung. Im Hilbertraum verwendet man für die duale Paarung das Skalarprodukt, das im 1. Argument linear, im 2. Argument aber *konjugiert* linear ist. Daher arbeitet man nicht mit dem zu $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dualen Operator A', sondern mit dem *adjungierten Operator* A^*, der durch die Gleichung

$$\langle Ax\,,\, y\rangle = \langle x\,,\, A^*y\rangle\,, \qquad \forall x,y \in \mathcal{H},$$

definiert ist. (Existenz und Wohldefiniertheit von A^* folgen leicht mit dem Rieszschen Darstellungssatz. Für das Spektrum gilt dann $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$; außerdem gilt

$$\big[(A-\lambda)^{-1}\big]^* = (A^* - \overline{\lambda})^{-1}, \qquad \forall \lambda \in \varrho(A).$$