¶8. Die Fouriertransformation auf klassischen Funktionenräumen.

In diesem Paragraphen untersuchen wir den Zusammenhang zwischen der Fouriertrafo als Abb. von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$ und den "klassischen" Definitionen von $\mathcal{F}$ als Abb. von $L_1 \to C_0$ bzw. von $L_2 \to L_2$, etc.

8.1. Theorem. (Riemann-Lebesgue)
(a) Die FT $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ läßt sich in eindeutiger Weise zu einer stetigen Abb. von $L_1(\mathbf{R}^m)$ nach $C_0(\mathbf{R}^m)$ fortsetzen (aber nicht surjektiv!).
(b) Für diese Fortsetzung gilt die Formel

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)dx, \qquad f \in L_1(\mathbf{R}^m), \quad k \in \mathbf{R}^m.$$

(c) Diese Fortsetzung stimmt überein mit der Einschränkung von $\hat{}\ : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ auf $L_1(\mathbf{R}^m)$.

Beweis.
(1) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \subset C_0(\mathbf{R}^m)$, nach Thm. 7.3. Weiter gilt die Abschätzung

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq (2\pi)^{-m/2} \|f\|_1, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Da $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ dicht ist in $L_1(\mathbf{R}^m)$, sehen wir, daß $\mathcal{F}$ eine beschränkte Abbildung von einem dichten Teilraum von $L_1(\mathbf{R}^m)$ nach $C_0(\mathbf{R}^m)$ ist. Nach dem B.L.T.-Theorem (zitiert direkt nach Thm. 7.8) läßt sich $\mathcal{F}$ in eindeutiger Weise zu einer stetigen Abb. von $L_1(\mathbf{R}^m)$ nach $C_0(\mathbf{R}^m)$ fortsetzen.
(2) Es folgt: Falls $f \in L_1$ und $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}$ mit $\|\varphi_n - f\|_1 \to 0$, dann gilt

$$\left\|\hat{f} - \hat{\varphi}_n\right\|_\infty \to 0;$$

insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) - (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)dx &= \lim \hat{\varphi}_n(k) - (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)dx \\
&= \lim_{n\to\infty} (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} (\varphi_n(x) - f(x))dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(3) Für $f \in L_1$ und $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt nach Definition der Fouriertransformation als Abb. von $\mathcal{S}'$

nach $\mathcal{S}'$, daß

$$\begin{aligned}
\widehat{\ell_f}(\varphi) &= \ell_f(\hat\varphi) = \int f(x)\hat\varphi(x)dx \\
&= \int f(x)\left((2\pi)^{-m/2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}\varphi(y)dy\right)dx \\
&=_{\text{Fubini}} \int \left((2\pi)^{-m/2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot y}f(x)dx\right)\varphi(y)dy \\
&= \int \hat f(y)\varphi(y)dx \\
&= \ell_{\hat f}(\varphi),
\end{aligned}$$

wobei $\hat f$ die klassische FT von f bezeichnet. ∎

8.2. Bemerkung. Die FT $\mathcal{F}\colon L_1(\mathbf{R}^m) \to C_0(\mathbf{R}^m)$ ist *nicht* surjektiv. Vgl. ÜA.

Wir wenden uns jetzt dem Satz von Plancherel zu:

8.3. Theorem. (Plancherel; vgl. Thm. 7.8)
Die Abbildung $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ läßt sich (in eindeutiger Weise) zu einer unitären *Abbildung $\mathcal{F}\colon L_2(\mathbf{R}^m) \to L_2(\mathbf{R}^m)$ fortsetzen. Für diese Fortsetzung gilt:*

$$\hat f(k) = \text{l.i.m.}_{R\to\infty}(2\pi)^{-m/2}\int_{|x|<R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}f(x)dx, \qquad \forall f \in L_2(\mathbf{R}^m), \tag{8.1}$$

wobei l.i.m. *den Limes in $L_2(\mathbf{R}^m)$ bezeichnet; die Gleichung* (8.1) *gilt dabei punktweise für alle $k \in \mathbf{R}^m \setminus N$, N Nullmenge.*[*)]
Die Fortsetzung auf $L_2(\mathbf{R}^m)$ stimmt überein mit der Einschränkung von $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ auf $L_2(\mathbf{R}^m)$.

Beweis.
(1) Die Fortsetzung von $\mathcal{S}$ auf L_2 ist Inhalt von Thm. 7.8.
(2) Wir beweisen nun Gl. (8.1): Für $R > 0$ sei

$$\chi_R := \begin{cases} 1, & |x| \le R, \\ 0, & |x| > R \end{cases}.$$

Für $f \in L_2$ ist dann $\chi_R f \in L_1 \cap L_2$ und es gilt

$$\chi_R f \to f \quad \text{in } L_2, \qquad R \to \infty.$$

Nach Thm. 7.8 gilt also auch

$$\widehat{\chi_R f} \to \hat f \quad \text{in } L_2, \qquad R \to \infty.$$

---

*) Dies bedeutet genauer: Wenn die Folge $(R_k) \subset (0,\infty)$ gegen ∞ konvergiert, dann gibt es eine Teilfolge (R_{k_j}) so, daß die RS von (8.1) für $j \to \infty$ punktweise f.ü. konvergiert.

Wegen $\chi_R f \in L_1$ ist dabei

$$\begin{aligned}\widehat{\chi_R f}(k) &= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \chi_R(x)\, f(x) dx \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int_{|x|<R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x) dx,\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbf{R}^m$. Also gilt

$$\left\| \hat{f} - (2\pi)^{-m/2} \int_{|x|<R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x) dx \right\|_{L_2(\mathbf{R}^m)} \to 0, \qquad R \to \infty,$$

und (8.1) folgt.
(3) Es bezeichne für den Moment $\mathcal{F}_{L_2}$ die FT als Abb. von $L_2 \to L_2$, und $\mathcal{F}_{\mathcal{S}'}$ die FT als Abb. von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$. Wir zeigen

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}'} \circ \iota = \iota \circ \mathcal{F}_{L_2}$$

auf $L_2(\mathbf{R}^m)$, wobei $\iota\colon L_2 \hookrightarrow \mathcal{S}'$ die kanonische Einbettung bezeichnet.
Sei dazu $f \in L_2$ und $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}$ mit $\varphi_n \to f$ in L_2.
Für bel. $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt dann

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_{\mathcal{S}'} \ell_f)(\varphi) &= \ell_f(\hat{\varphi}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x) \hat{\varphi}(x) dx \\ &=_{\text{Fubini}} \lim_{n\to\infty} \int \hat{\varphi}_n(x) \varphi(x) dx \\ &= \int (\mathcal{F}_{L_2} f)(x) \varphi(x) dx \\ &= \ell_{\mathcal{F}_{L_2} f}(\varphi),\end{aligned}$$

denn aus $\varphi_n \to f$ in L_2 folgt wegen Thm. 7.8, daß $\hat{\varphi}_n \to \mathcal{F}_{L_2} f$ in L_2. ∎

Bemerkung. Wir haben gezeigt, daß $\mathcal{F}\colon L_1 \to L_\infty$ und $\mathcal{F}\colon L_2 \to L_2$ stetig sind. Mit Hilfe der *komplexen Interpolationstheorie* kann man aus diesen beiden Eigenschaften die *Hausdorff-Young-Ungleichung* folgern:
Sei $1 \le q \le 2$ und sei $2 \le p \le \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann ist $\mathcal{F}\colon L_q(\mathbf{R}^m) \to L_p(\mathbf{R}^m)$ stetig mit Norm $\le (2\pi)^{m(1/2-1/q)}$, d.h., es gilt die Ungleichung

$$\left\| \hat{f} \right\|_{L_p} \le (2\pi)^{m(1/2-1/q)} \|f\|_{L_q}, \qquad f \in L_q.$$

(Vgl. [RS-II; Section IX.4 u. Appendix]). Man verwendet den Interpolationssatz von Riesz und Thorin, der auf dem HADAMARDschen 3-Liniensatz beruht.

8.5. Bemerkung. In ähnlicher Weise kann man zeigen, daß die “klassische” Fouriertransformation einer stetigen Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, die in $(1,\infty)$ und in $(-\infty,-1)$ monoton gegen Null fällt mit $x \to \pm\infty$ und für die $x \mapsto xf(x)$ beschränkt ist, mit der FT im Sinne von $\mathcal{S}'$ übereinstimmt. (ÜA)

Wir kommen nun zum Satz von Bochner, der sich mit der FT der endlichen (positiven) Maße beschäftigt. Maße sind per definitionem positiv; andernfalls spricht man von “signierten Maßen.” Ein Maß μ auf dem Grundraum Ω heißt *endlich*, wenn $\mu(\Omega) < \infty$ ist. Das Lebesgue-Maß auf dem $\mathbf{R}^m$ ist nicht endlich, sondern nur σ-endlich.

8.6. Definition. Sei μ ein endliches Borel-Maß auf $\mathbf{R}^m$. Dann definieren wir

$$\hat{\mu}(k) := (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} d\mu(x). \tag{8.2}$$

Es ist $\hat{\mu}$ beschränkt und stetig (s.u.).

Jedes (positive) endliche Maß μ auf $\mathbf{R}^m$ erzeugt eine temperierte Distribution $T_\mu \in \mathcal{S}'$ vermöge

$$T_\mu(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^m} \varphi(x) d\mu(x)$$

(Spezialfall der Beispielklasse mit polynomiell beschränkten Maßen).

Wir zeigen, daß $\hat{T}_\mu$ (gebildet in $\mathcal{S}'$) mit $T_{\hat{\mu}}$ übereinstimmt, wobei $\hat{\mu}$ die Funktion aus (8.2) ist: Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist nämlich nach Fubini

$$\begin{aligned} T_{\hat{\mu}}(\varphi) &= \int \hat{\mu}(k)\varphi(k)dk \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} d\mu(x) \right) \varphi(k) dk \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int \left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \varphi(k) dk \right) d\mu(x) \\ &= \int \hat{\varphi}(x) d\mu(x) = T_\mu(\hat{\varphi}) = \widehat{T_\mu}(\varphi). \end{aligned}$$

Also sind die beiden Definitionen für die FT von μ konsistent.

8.7. Satz.
Sei μ ein endliches, positives Maß auf $\mathbf{R}^m$. Dann gilt:

(i) $\hat{\mu}$ ist eine stetige, beschränkte Funktion mit

$$|\hat{\mu}(k)| \le (2\pi)^{-m/2} \mu(\mathbf{R}^m).$$

(ii) Für alle $N \in \mathbf{N}$ und alle $k_1, \ldots, k_N \in \mathbf{R}^m$ ist die Matrix $(\hat{\mu}(k_i - k_j))_{i,j=1,\ldots,N}$ positiv semi-definit, d.h., es gilt

$$\sum_{i,j=1}^{N} \hat{\mu}(k_i - k_j) \xi_i \overline{\xi_j} \ge 0, \qquad \forall (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbf{C}^N.$$

Beweis. Seien $k_1, \ldots, k_N \in \mathbf{R}^m$ und $\xi_1, \ldots, \xi_N \in \mathbf{C}$. Dann rechnet man nach

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{N} \hat{\mu}(k_i - k_j)\xi_i\overline{\xi}_j &= \sum_{i,j=1}^{N} \left((2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_i-k_j)\cdot x} d\mu(x) \right) \xi_i\overline{\xi}_j \\
&= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \left(\sum_{i,j=1}^{N} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i\cdot x}\xi_i)(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}k_j\cdot x}\overline{\xi}_j) \right) d\mu(x) \\
&= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \left| \sum_{i=1}^{N} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_i\cdot x}\xi_i) \right|^2 d\mu(x) \geq 0.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Stetigkeit von $\hat{\mu}$. Sei $(k_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{R}^m$ mit $k_n \to k$. Dann konvergiert $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n\cdot x}$ punktweise f.ü. in $x \in \mathbf{R}^m$ gegen $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}$. Da μ endliches Maß, ist die konstante Funktion 2 eine integrable Majorante für $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_n\cdot x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\right|$. Mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt $\hat{\mu}(k_n) \to \hat{\mu}(k)$.
Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
|\hat{\mu}(k)| &\leq (2\pi)^{-m/2} \int \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\right| d\mu(x) \\
&= (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} d\mu(x).
\end{aligned}$$

∎

8.8. Definition. Eine beschränkte, stetige Funktion $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$ heißt *vom positiven Typ,* wenn für alle $N \in \mathbf{N}$ und alle $k_1, \ldots, k_N \in \mathbf{R}^m$ die $N\times N$-Matrix $(f(k_i-k_j))_{i,j=1,\ldots,N}$ positiv (semi-)definit ist.

8.9. Bemerkung. Aus der Definition folgen unmittelbar 3 Eigenschaften von f:

(*i*) $N = 1$ liefert $f(0) \geq 0$.

(*ii*) $N = 2$ mit $k_1 := x$ und $k_2 := 0$ liefert, daß die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} f(0) & f(x) \\ f(-x) & f(0) \end{pmatrix}$$

pos. semi-definit ist.
Insbesondere ist die quadratische Form $\mathbf{C}^2 \ni \xi \mapsto \langle M\xi\,,\,\xi\rangle_f$ reellwertig und daher muß $f(-x) = \overline{f(x)}$ gelten.
Wegen M positiv semi-definit sind die Eigenwerte der Matrix M nicht-negativ, und somit ist $\det M \geq 0$. Aus $\det M \geq 0$ folgt sofort $|f(x)| \leq f(0)$.

8.10. Bemerkung. Die Funktionen vom pos. Typ bilden einen *Kegel.*
M.a.W.: f, g vom positiven Typ $\implies$ $tf+(1-t)g$ vom positiven Typ für alle $t \in [0,1]$, sowie

f vom positiven Typ und $t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad tf$ vom positiven Typ.

8.11. Theorem. (Bochner)
Die Fouriertransformation eines pos. endlichen Maßes μ ist eine Funktion vom positiven Typ.
Umgekehrt ist jede Funktion vom positiven Typ die Fouriertransformierte eines positiven endlichen Maßes.

M.a.W.: Der Wertebereich der FT auf den (positiven) endlichen Maßen ist genau der Kegel der Funktionen vom positiven Typ.

Beweis.
(1) Die erste Aussage haben wir in Satz 8.7 bewiesen.
(2) Sei nun umgekehrt f eine Funktion vom positiven Typ. Sei $\mathcal{K}$ der VR der komplexwertigen Funktionen φ auf $\mathbf{R}^m$, die nur an endlich vielen Stellen Werte $\neq 0$ haben, d.h.,

$$\varphi \in \mathcal{K} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \text{ endlich viele } x_1, \ldots, x_N \in \mathbf{R}^m \text{ mit } \varphi(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbf{R}^m \setminus \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

Offenbar ist $\mathcal{K}$ ein VR. Wir ordnen der Fkt. f eine Sesquilinearform $\langle . \, , . \rangle_f$ auf $\mathcal{K}$ zu durch

$$\langle \varphi \, , \psi \rangle_f := \sum_{x,y \in \mathbf{R}^m} f(x-y)\varphi(x)\overline{\psi(y)}, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{K};$$

die Summe ist stets *endlich.*
$\langle . \, , . \rangle_f$ hat alle Eigenschaften eines Skalarprodukts, außer daß $\langle \varphi \, , \varphi \rangle_f = 0$ sein könnte für ein $\varphi \neq 0$. Wir betrachten daher die Menge

$$\mathcal{N} := \{\varphi \in \mathcal{K} \, ; \, \langle \varphi \, , \varphi \rangle_f = 0\}.$$

$\mathcal{N}$ ist sogar ein Vektorraum, denn für $\langle . \, , . \rangle_f$ gilt die Schwarzsche Ungleichung und damit gilt die Dreiecksungleichung für die Halbnorm $\sqrt{\langle . \, , . \rangle_f}$. Daher folgt aus $\varphi, \psi \in \mathcal{N}$ sofort $\varphi + \psi \in \mathcal{N}$.
Wir definieren nun $\mathcal{K}/\mathcal{N}$ als die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathcal{K}$ bezügl. der Äquivalenzrelation

$$\varphi \sim_{\mathcal{N}} \psi \quad :\Longleftrightarrow \quad \varphi - \psi \in \mathcal{N}.$$

(Ausgeschrieben bedeutet $\varphi \sim_{\mathcal{N}} \psi$, daß $\sum_{x,y \in \mathbf{R}^m} f(x-y)\varphi(x)\overline{\psi(y)} = 0$ ist.)
Man zeigt leicht, daß dann $\mathcal{K}/\mathcal{N}$ ein Prä-Hilbertraum bezgl. des Skalarprodukts $\langle . \, , . \rangle_f$ ist. Sei

$$\mathcal{H} := \overline{\mathcal{K}/\mathcal{N}}$$

die Vervollständigung von $\mathcal{K}/\mathcal{N}$.
Die Gruppe der Translationen auf $\mathbf{R}^m$ erzeugt eine stark stetige Gruppe unitärer Operatoren auf $\mathcal{H}$: Für $t \in \mathbf{R}^m$ definieren wir U_t auf $\mathcal{K}$ durch

$$(U_t\varphi)(x) := \varphi(x-t), \qquad \varphi \in \mathcal{K}, \quad x \in \mathbf{R}^m.$$

Behauptung (1): U_t induziert eine Isometrie auf $\mathcal{K}/\mathcal{N}$.
Beweis der Beh. (1): Wir zeigen zunächst, daß U_t Ä-Klassen auf Ä-Klassen abbildet: Seien dazu $\varphi, \psi \in \mathcal{K}$ mit $\varphi \sim_{\mathcal{N}}= \psi$, d.h., mit

$$\sum_{x,y \in \mathbf{R}^m} f(x-y)\varphi(x)\overline{\psi(y)} = 0.$$

Man sieht leicht, daß ganz allgemein

$$\langle U_t\varphi\,,\, U_t\psi\rangle_f = \langle \varphi\,,\, \psi\rangle_f\,, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{K}. \tag{$*$}$$

(Zum Beweis von $(*)$ verwende die Substitutionen $\xi := x - t$, $\eta := y - t$ etc.)
Daher ist $\varphi \sim_{\mathcal{N}} \psi$ genau dann, wenn $U_t\varphi \sim_{\mathcal{N}} U_t\psi$. Daher induziert $U_t\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ eine lineare Abb. $U'_t\colon \mathcal{K}/\mathcal{N} \to \mathcal{K}/\mathcal{N}$. Wegen $(*)$ ist $U'_t\colon \mathcal{K}/\mathcal{N} \to \mathcal{K}/\mathcal{N}$ isometrisch.

Behauptung (2): $U'_t\colon \mathcal{K}/\mathcal{N} \to \mathcal{K}/\mathcal{N}$ läßt sich zu einem *unitären Operator* $\tilde{U}_t\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ fortsetzen (wobei $\mathcal{H}$ die Vervollständigung von $\mathcal{K}/\mathcal{N}$ bezeichnet).
Beweis der Beh. (2): Nach Beh. (1) sind $U'_t\colon \mathcal{K}/\mathcal{N} \to \mathcal{K}/\mathcal{N}$ und $U'_{-t}\colon \mathcal{K}/\mathcal{N} \to \mathcal{K}/\mathcal{N}$ isometrisch. Wegen $id = U'_t \circ U'_{-t}$ folgt U'_t surjektiv. Da $U'_t\colon \mathcal{K}/\mathcal{N} \to \mathcal{K}/\mathcal{N}$ surjektiv und isometrisch, läßt sich U'_t nach dem BLT-Theorem zu einer unitären Abb. $\tilde{U}_t\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ fortsetzen. Dabei ist klar, daß die Operatoren $\tilde{U}_t$ die Gruppeneigenschaft

$$\tilde{U}_{t+s} = \tilde{U}_t \circ \tilde{U}_s, \qquad \tilde{U}_0 = Id,$$

besitzen. Außerdem gilt:
Behauptung (3): Die Familie $(\tilde{U}_t)_{t\in\mathbf{R}}$ ist *stark stetig,* d.h., für alle $\varphi \in \mathcal{H}$ gilt

$$\tilde{U}_{t_n}\varphi \to \tilde{U}_t\varphi, \qquad t_n \to t.$$

Bew. von Beh. (3): Wegen der Gruppeneigenschaft genügt es, Stetigkeit bei $t = 0$ zu beweisen. Da die Operatoren $\tilde{U}_t$ Norm 1 haben, genügt es, die Stetigkeitseigenschaft für φ aus dem dichten Teilraum $\mathcal{K}/\mathcal{N} \subset \mathcal{H}$ zu beweisen (ÜA).
Seien also $\varphi \in \mathcal{K}$ und $(t_n) \subset \mathbf{R}$ mit $t_n \to 0$. Dann:

$$\langle \varphi - U_{t_n}\varphi\,,\, \varphi - U_{t_n}\varphi\rangle_f = \sum_{x,y\in\mathbf{R}^m} f(x-y)(\varphi(x)-\varphi(x-t_n))\cdot(\overline{\varphi(y)}-\overline{\varphi(y-t_n)}) \to 0, \quad n \to \infty,$$

da f stetig. $\bullet$

Daher ist $(\tilde{U}_t; t \in \mathbf{R})$ eine stark stetige Gruppe von unitären Operatoren auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$.
Nach dem Satz von STONE gibt es ein Projektions-wertiges Maß P_λ auf $\mathbf{R}^m$ so, daß

$$\left\langle \tilde{U}_t\varphi\,,\, \psi\right\rangle_f = \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda} d\,\langle P_\lambda\varphi\,,\, \psi\rangle_f\,, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

(Hier evtl. Erläuterungen zu Spektralmaßen, vgl. z.B. [RS-I; Sections VIII.3, VIII.4])

Sei nun $\tilde{\varphi}_0 \in \mathcal{H}$ die Äquivalenzklasse, die die Funktion

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

enthält. Dann gilt für alle $t \in \mathbf{R}^m$

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{x,y \in \mathbf{R}^m} f(x-y)\varphi_0(x-t)\varphi_0(y) \\ &= \left\langle \tilde{U}_t \tilde{\varphi}_0 \, , \, \tilde{\varphi}_0 \right\rangle_f \\ &= \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\lambda} d \left\langle P_\lambda \tilde{\varphi}_0 \, , \, \tilde{\varphi}_0 \right\rangle_f . \end{aligned}$$

Hierin erzeugt aber $\langle P_\lambda \tilde{\varphi}_0 \, , \, \tilde{\varphi}_0 \rangle_f$ ein endliches, positives Maß, und die Beh. folgt. ∎

Bemerkung. Der Satz von Bochner läßt sich auf Distributionen verallgemeinern: Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ heißt *vom positiven Typ,* wenn

$$T(\overline{\tilde{\varphi}} * \varphi) \geq 0, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m),$$

gilt. Der Satz von Bochner-Schwartz sagt dann: Eine Distribution $T \in \mathcal{D}'$ ist genau dann vom pos. Typ, wenn $T \in \mathcal{S}'$ ist und wenn es ein (pos.) Maß μ mit polynomialer Wachstumsschranke gibt, so daß $T = \widehat{\ell_\mu}$.
Weitere Bemerkung zum Satz von Minlos aus [Simon; Funct. Integration].

Als nächstes betrachten wir die Fouriertrafo von Funktionen und von Distributionen mit kompaktem Träger. Hier ist der Satz von Paley-Wiener grundlegend. Wir beginnen mit der einfacheren Richtung.

Vorbemerkung. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$. Dann ist das Integral

$$\hat{\varphi}(\zeta) = (2\pi)^{-m/2} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\zeta} \varphi(x) dx \tag{$*$}$$

für alle $\zeta \in \mathbf{C}^N$ wohldefiniert. Sei nämlich $R > 0$ so groß, daß $\mathrm{supp}\varphi \subset B_R(0)$. Dann gilt $\left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot\zeta}\right| \leq \mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}\zeta|}$, wobei $\mathrm{Im}\,\zeta$ den Imaginärteil von ζ bezeichnet. Daher können wir für $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ die Fouriertransformierte $\hat{\varphi}$ als Funktion auf $\mathbf{C}^m$ auffassen.

8.13. Theorem. (Paley-Wiener, 1. Teil) *Sei* $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ *und sei* $R > 0$ *so, daß* $\mathrm{supp}\varphi \subset \overline{B}_R = \{x \in \mathbf{R}^m \, ; \, |x| \leq R\}$. *Sei* $g := \hat{\varphi}$.
Dann ist $g \colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}$ *eine ganze holomorphe Funktion, die den folgenden Abschätzungen genügt: zu jedem* $N \in \mathbf{N}$ *gibt es eine Konstante* $c_N \geq 0$ *mit*

$$|g(\zeta)| \leq c_N \frac{\mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N}, \qquad \zeta \in \mathbf{C}^m. \tag{8.4}$$

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ mit $\varphi(x) = 0$ für $|x| > R$. Nach Lebesgue kann man in Gl. $(*)$ unterm Integral differenzieren und stellt so fest, daß $\hat{\varphi}$ eine analytische Funktion der m komplexen Veränderlichen $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ ist. (Dazu zeigt man konkret, daß

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\zeta_j}} g(\zeta) = 0, \qquad j = 1, \ldots, m, \quad \zeta \in \mathbf{C}^m,$$

gilt.) Partielle Integration liefert

$$(\prod_{j=1}^m (\mathrm{i}\zeta_j)^{\alpha_j})\, \hat{\varphi}(\zeta) = (2\pi)^{-m/2} \int_{|x|<R} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\zeta\cdot x} D^\alpha \varphi(x) dx,$$

also

$$\begin{aligned} |\zeta^\alpha|\, |\hat{\varphi}(\zeta)| &\leq (2\pi)^{-m/2} \int_{|x|<R} \mathrm{e}^{R|\operatorname{Im}\zeta|} |D^\alpha \varphi(x)| dx \\ &\leq (2\pi)^{-m/2} \mathrm{e}^{R|\operatorname{Im}\zeta|} \int |D^\alpha \varphi(x)| dx. \end{aligned}$$

Offenbar gibt es eine Konstante c_0 mit $|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq c_0$ für $|\zeta| \leq 1$.
Zusammengenommen folgt

$$|\hat{\varphi}(\zeta)| \leq C_N \frac{\mathrm{e}^{R|\operatorname{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N}, \qquad \zeta \in \mathbf{C}^m.$$

∎

8.14. Theorem. (Paley-Wiener, 2. Teil) *Es sei $g\colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}$ eine ganze holomorphe Funktion mit der folgenden Eigenschaft: es gibt ein $R \geq 0$ und es gibt für alle $N \in \mathbf{N}$ Konstanten $c_N \geq 0$ mit*

$$|g(\zeta)| \leq c_N \frac{\mathrm{e}^{R|\operatorname{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N}, \qquad \zeta \in \mathbf{C}^m. \tag{8.4}$$

Dann gibt es eine Funktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \in \mathbf{R}^m \,;\, |x| \leq R\}$ *so, daß $g = \hat{\varphi}$.*

Beweis. Sei g eine ganze holomorphe Funktion, die der Abschätzung (8.4) genügt.
Sei $\zeta = \lambda + \mathrm{i}\eta$ mit $\lambda, \eta \in \mathbf{R}^m$.
Für jedes feste $\eta \in \mathbf{R}^m$ ist dann die Fkt.

$$\mathbf{R}^m \ni \lambda \mapsto g(\lambda + \mathrm{i}\eta) \equiv h_\eta(\lambda)$$

aus $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$: Wegen (8.4) fällt nämlich zunächst einmal $h_\eta(\lambda)$ rascher ab als jedes (inverse) Polynom. Nach der Cauchyschen Integralformel

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

(für $m = 1$) kann man $|D^\alpha h_\eta(\lambda)|$ durch Terme der Form $c_\alpha \sup\{|g(\lambda + i\eta + \xi)| \ ; \ \xi \in \mathbf{C}^m, |\xi| = 1\}$ abschätzen; daher klingen auch alle $D^\alpha h_\eta(.)$ rascher ab als $(1 + |x|)^{-k}$, für alle $k \in \mathbf{N}$.

$\Longrightarrow \quad h_\eta \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ für alle $\eta \in \mathbf{R}^m$.

Wir definieren nun

$$\varphi(x) := (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot\lambda} g(\lambda) d\lambda, \qquad x \in \mathbf{R}^m. \tag{8.5}$$

Wegen $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ und Thm. 7.3 ist dann $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$. Wir zeigen noch

$$\varphi(x) = 0, \qquad \text{für } |x| > R. \tag{8.6}$$

Da g der Bed. (8.4) genügt, können wir mit dem Cauchyschen Integralsatz schließen,(*) daß

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot(\lambda+\mathrm{i}\eta)} g(\lambda + \mathrm{i}\eta) d\lambda, \qquad x \in \mathbf{R}^m. \tag{8.7}$$

Mit (8.4) und (8.7) folgt dann

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\le C'_N \int_{\mathbf{R}^m} \frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot(\lambda+\mathrm{i}\eta)}\right| \cdot \mathrm{e}^{R|\eta|}}{(1 + |\lambda + \mathrm{i}\eta|)^N} d\lambda \\ &\le C'_N \mathrm{e}^{R|\eta| - \eta\cdot x} \int_{\mathbf{R}^m} \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda + \mathrm{i}\eta|)^N} \\ &\le C'_N \mathrm{e}^{R|\eta| - \eta\cdot x} \int_{\mathbf{R}^m} \frac{d\lambda}{(1 + |\lambda|)^N}. \end{aligned}$$

Für $N > m$ konvergiert das Integral $\int_{\mathbf{R}^m} (1 + |\lambda|)^{-N} d\lambda$.

In (8.7) hängt aber $\varphi(x)$ nicht von η ab. Wenn wir nun in der obigen Abschätzung $\eta := tx$ wählen mit $t \in \mathbf{R}$, so folgt mit $t \to \infty$ (und weiterhin mit $N > m$), daß

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\le \tilde{c}_N \mathrm{e}^{R|\eta| - \eta\cdot x} = \tilde{c}_N \mathrm{e}^{Rt|x| - t|x|^2} \\ &= \tilde{c}_N \mathrm{e}^{t|x|(R - |x|)} \to 0, \qquad t \to \infty, \end{aligned}$$

da $|x| > R$. Also ist $\varphi(x) = 0$ für $|x| > R$. ∎

Für Distributionen gilt entsprechend:

Theorem. *Eine Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ hat genau dann kompakten Träger, wenn $\hat{T}$ durch eine ganze holomorphe Funktion $g = g(\zeta)$ der m komplexen Veränderlichen $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in \mathbf{C}$ dargestellt wird, wobei g den folgenden Wachstumsbedingungen genügt:*

$$|g(\zeta)| \le C_N (1 + |\zeta|)^N \mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}\ \zeta|}. \tag{8.8}$$

Wenn (8.8) für $\hat{T} = g$ gilt, dann ist der Träger von T in $\overline{B}_R = \{x \in \mathbf{R}^m \ ; \ |x| \le R\}$ enthalten.

(*) Wende den CIS für $m = 1$ an auf den Rand des Rechtecks mit den Ecken $-M$, M, $M + \mathrm{i}\eta$, $-M + \mathrm{i}\eta$ und betrachte $M \to \infty$.