¶8. Schwache Topologien auf Banachräumen.

8.1. Definition. Sei X ein BR mit Dualraum X'. Die *schwache Topologie* auf X ist die schwächste (=gröbste) Topologie auf X, für die alle linearen Funktionale $\lambda \in X'$ stetig sind.

Äquivalente Beschreibung: Eine *Nullumgebungsbasis* der schwachen Topologie wird durch Mengen der Gestalt

$$N(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \delta) := \{x \in X \; ; \; |\lambda_i(x)| < \delta, \; i = 1, \ldots, n\} \tag{8.1}$$

gegeben (mit beliebigen $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_i \in X' \setminus \{0\}$ und $\delta > 0$). Man kann sich diese Mengen als (unendlich lange) "Zylinder" mit endlichdimensionalem "Querschnitt" vorstellen.
Die Mengen $N(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \delta)$ sind sehr groß; zB gilt

$$N(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \delta) \supset \ker(\lambda_1) \cap \ldots \cap \ker(\lambda_n),$$

mit "codim $\ker(\lambda_i) = 1$, also codim $(\ker(\lambda_1) \cap \ldots \cap \ker(\lambda_n)) \le n$." Damit meint man genauer das folgende: Für $\lambda \in X'$ ist $M := \ker(\lambda)$ ein abgeschlossener Teilraum von X und $\tilde{X} := X/M$ ist wieder ein Banachraum. Wie in Par. 4 induziert jedes $0 \neq \lambda \in X'$ eine stetige, lineare und *bijektive* Abb. $\tilde{\lambda}\colon \tilde{X} \to \mathbf{C}$. Nach Korollar 4.11 liefert $\tilde{\lambda}$ daher einen (topologischen) Isomorphismus zwischen $\tilde{X}$ und $\mathbf{C}$. Insbesondere ist $\tilde{X}$ eindimensional: Für $x_0 \in X \setminus M$ ist $X = M + \operatorname{span}\{x_0\}$. (Im Vergleich zum allgemeinen Fall hat man kein Problem mit der Abgeschlossenheit des Komplements von M weil dieses Komplement endlich-dimensional ist.)

Eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann offen in der schwachen Topologie, wenn es zu jedem $x \in U$ eine Nullumgebung N wie in (8.1) gibt mit $x + N \subset U$.
Vergleich mit der Normtopologie: hier bilden die Kugeln $B_\delta(0) = \{x \in X \; ; \; \|x\| < \delta\}$, $\delta > 0$, eine Nullumgebungsbasis (jede Nullumgebung enthält eine Kugel $B_\delta(0)$).
Jede der Mengen $N(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \delta)$ ist auch offen in der Norm-Topologie von X, wie wir unten zeigen werden.

Erinnerung: Für lineare Abbildungen $T : X \to Y$ zwischen zwei normierten Vektorräumen gilt bzgl. der Norm-Topologie:

$$\begin{aligned} T \text{ stetig } &\iff T \text{ stetig bei } 0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : (\|x\|_X < \delta \implies \|Tx\|_Y < \varepsilon) \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists \text{ Nullumgebung } U \subset X \text{ mit } \|Tx\|_Y \le \varepsilon, \, \forall x \in U. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Wenn wir nun X mit der *schwachen* Topologie versehen (aber auf Y weitherhin mit der Norm-Topologie arbeiten), so ist ein linearer Operator T genau dann stetig (bzgl. der schwachen Topologie auf X), wenn folgendes gilt:

• Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine schwache Nullumgebung N wie in (8.1) so, daß $\|Tx\|_Y < \varepsilon$ ist für alle $x \in N$.

Diese Bedingung kann man noch konkreter formulieren:

• Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbf{N}$, lineare Funktionale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in X'$ und ein $\delta > 0$ mit

$$|\lambda_i(x)| < \delta, \quad i = 1, \ldots n \quad \Longrightarrow \quad \|Tx\|_Y < \varepsilon. \tag{8.3}$$

Im allgemeinen wird ein Operator $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ nicht stetig in der schwachen Topologie auf X sein, weil diese viel zu grob ist. Eine Ausnahme bilden die linearen Funktionale (s.u.). Wenn man hingegen Y mit der schwachen Topologie ausrüstet, so ist es für einen linearen Operator von X nach Y sehr viel leichter, stetig oder kompakt zu sein.

8.2. Definition. (Vgl. mit Definition 4.4.)
Eine Folge $(x_n) \subset X$ *konvergiert schwach gegen* $x \in X$, falls

$$\lambda(x_n) \to \lambda(x), \qquad n \to \infty, \quad \forall \lambda \in X'. \tag{8.4}$$

Die schwache Konvergenz einer Folge (x_n) ist genau die Konvergenz von (x_n) in der schwachen Topologie. (einfache ÜA)

8.3. Proposition.
(a) Die schwache Topologie ist schwächer (gröber) als die Norm-Topologie.
(b) Jede schwach konvergente Folge ist (in der Norm) beschränkt.
(c) Die schwache Topologie ist Hausdorffsch.

Beweis. (a) Es genügt, Nullumgebungen zu vergleichen. Zu jeder Nullumgebung N_0 in der schwachen Topologie existiert eine Nullumgebung $N \subset N_0$ wie in Eqn. (8.1). Sei

$$\gamma := \frac{\delta}{\max_{1 \le i \le n} \|\lambda_i\|_{X'}};$$

für die Normkugel

$$B_\gamma := \{x \in X \,;\, \|x\|_X < \gamma\}$$

gilt dann $B_\gamma \subset N \subset N_0$, denn für $x \in B_\gamma$ und $j = 1, \ldots, n$ ist

$$|\lambda_j(x)| < \|\lambda_j\|_{X'} \gamma \le \delta.$$

(b) Vgl. Korollar 4.6.
(c) Wir haben bereits in ¶7 gesehen, daß X' die Punkte von X trennt, d.h., zu $x \ne y \in X$ gibt es stets ein $\lambda \in X'$ mit $\eta := |\lambda(x - y)| \ne 0$. Es ist

$$N := \{x \in X \,;\, |\lambda(x)| < \eta/2\}$$

eine Nullumgebung in der schwachen Topologie von X und $(x + N) \cap (y + N) = \emptyset$. Damit ist gezeigt, daß es zu $x \ne y$ stets disjunkte (schwache) Umgebungen N_x von x und N_y von y gibt. ∎

Die schwache Topologie ist nicht nur schwächer als die Normtopologie, sie ist i.a. sogar erheblich schwächer:

8.4. Beispiel. Sei X ein BR, X sei nicht endlich-dimensional. Es bezeichne

$$\mathbf{S} := \{x \in X \; ; \; \|x\| = 1\}$$

die Einheitssphäre in X. Man sieht sofort, daß $\mathbf{S}$ in der Norm-Topologie abgeschlossen ist, $\overline{\mathbf{S}} = \mathbf{S}$. Hingegen gilt in der schwachen Topologie

$$\overline{\mathbf{S}}^w = \overline{B} = \{x; \|x\| \leq 1\};$$

hierbei ist $\overline{\mathbf{S}}^w$ der Abschluß von $\mathbf{S}$ in der schwachen Topologie, d.h., $\overline{\mathbf{S}}^w$ ist die kleinste schwach abgeschlossene Menge, die $\mathbf{S}$ enthält.

(Beweis-Idee: Angenommen, 0 gehört nicht zum schwachen Abschluß; dann gibt es auch schon eine offene Nullumgebung N vom Typ (8.1), die nicht zum schwachen Abschluß gehört. Offenbar gilt aber $\mathbf{S} \cap N \neq \emptyset$, Widerspruch!
Die umgekehrte Inklusion folgt mit dem Trennungssatz: stark abgeschlossene konvexe Mengen sind auch schwach abgeschlossen.)

Warnung. Wenn X nicht endlich-dimensional ist, so ist die schwache Topologie nicht metrisierbar (nicht einmal dann, wenn X ein separabler Hilbertraum ist!). Daher kann man nicht mit Folgen arbeiten, um den Abschluß einer Menge zu beschreiben, oder um die Stetigkeit von Abbildungen zu untersuchen. (... Netze!)
(Metrisierbarkeit ist äquivalent dazu, daß es eine abzählbare Nullumgebungsbasis gibt.)

8.5. Satz. Ein lineares Funktional λ auf dem BR X ist genau dann schwach stetig, wenn es Norm-stetig ist.

Beweis.
(a) Da die Norm-Topologie auf X feiner ist als die schwache Topologie, ist jedes schwach-stetige lineare Funktional trivialerweise auch Norm-stetig.
(b) Sei $\lambda \colon X \to \mathbf{C}$ linear und stetig bzgl. der Norm-Topologie auf X, also $\lambda \in X'$. Dann sind die Mengen

$$N_\varepsilon := \{x \in X \; ; \; |\lambda(x)| < \varepsilon\}$$

vom Typ (8.1) und sind damit schwache Nullumgebungen. Damit folgt, daß die Urbildmengen $\lambda^{-1}(\{z \in \mathbf{C}; |z| < \varepsilon\})$ offen sind in der schwachen Topologie. Daher ist λ stetig bzgl. der schwachen Topologie. ∎

Wie oben angemerkt, ist die entsprechende Aussage für Operatoren $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ im allgemeinen *nicht* wahr!

8.6. Theorem. (Eberlein-Shmulyan)
Ein BR X ist genau dann reflexiv, wenn die (abgeschlossene) Einheitskugel in X schwach folgen-kompakt ist (d.h., wenn es zu jeder Folge $(x_n) \subset X$ mit $\|x_n\| \leq 1$ eine TF $(x_{n_j})_{j\in\mathbf{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und ein $x \in X$ gibt mit $x_{n_j} \to_w x$, mit $j \to \infty$).

Beweis: Die Richtung "$\Rightarrow$" ist vergleichsweise einfach (der Abschluss von $\mathrm{span}\{x_n \; ; \; n \in \mathbf{N}\}$ ist ein separabler Teilraum von X, und man kann mit Teilfolgenauswahl und Diagonalfolgen arbeiten.

Die Richtung "$\Leftarrow$" ist recht aufwendig zu beweisen (vgl. [Y]).

8.7. Definition. Sei X ein BR mit Dualraum X'. Die *schwach*-Topologie auf X'* ist die schwächste (=gröbste) Topologie, für die die Funktionale

$$X' \ni \lambda \mapsto \lambda(x)$$

für alle $x \in X$ stetig sind.

Bemerkung. Die schwach*-Topologie ist (nur) bei nicht-reflexiven Räumen von Interesse, denn hier müsste man bei der schwachen Konvergenz in X' mit dem Raum X'' arbeiten, den man häufig nicht wirklich kennt. Ist X reflexiv, so stimmt die schwach*-Topologie auf X' mit der schwachen Topologie auf X' überein. Offensichtlich ist die schwach*-Topologie auf X' schwächer als die schwache Topologie auf X'.

8.8. Theorem. (Banach-Alaoglu; vgl. [RS-I, p. 115])
Sei X ein BR mit Dualraum X'. Dann ist die (abgeschlossene) Einheitskugel in X' kompakt in der schwach*-Topologie auf X'.

Der Beweis stützt sich auf einen Satz von Tychonoff; vgl. [RS-I], [Y] etc.

Da auch die schwach*-Topologie i.a. nicht metrisierbar ist, bedeutet Kompaktheit einer Menge $K \subset X'$ in der schwach*-Topologie zunächst nur, daß es zu jeder Überdeckung $K \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ durch eine Familie schwach*-offener Mengen $U_\alpha \subset X'$ ein endliches Teilsystem gibt, das ebenfalls überdeckt. Man kann aber nicht schließen, daß es zu beschränkten Folgen konvergente Teilfolgen geben muß (höchstens konvergente Teilnetze)!

Anwendung: Da $L_\infty = L_1'$ gilt, ist die Einheitskugel in L_∞ kompakt in der schwach*-Togologie von L_∞.