Kapitel II. Die Fouriertransformation.

¶7. Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$ und auf $\mathcal{S}'$.

7.1. Definition. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ definieren wir die *Fouriertransformation* $\hat{f}$ von f durch

$$(\mathcal{F}f)(k) \equiv \hat{f}(k) := (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)dx, \tag{7.1}$$

und die (inverse) Fourier-Transformation $\check{g}$ von g durch

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) \equiv \check{g}(x) := (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} g(k)dk. \tag{7.2}$$

Daß die Bezeichnung "inverse FT" gerechtfertigt ist, werden wir in diesem Paragraphen sehen.

7.2. Satz. *Die Abbildungen $\mathcal{F} = \hat{}$ und $\mathcal{F}^{-1} = \check{}$ sind stetige lineare Abb. von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$. Weiter gilt für alle Multiindizes $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^m$*

$$(\mathrm{i}k)^\alpha \left(D_k^\beta \hat{f}\right)(k) = \mathcal{F}\big[D_x^\alpha \left((-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right)\big](k) \tag{7.3}$$

Bem.: Man mache sich die Spezialfälle $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ in (7.3) klar!

Beweis. Die Linearität von $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ ist klar. Wir rechnen nun aus

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{m/2}(\mathrm{i}k)^\alpha (D_k^\beta \hat{f})(k) &= (\mathrm{i}k)^\alpha D_k^\beta \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)dx \\
&= (\mathrm{i}k)^\alpha \int_{\mathbf{R}^m} [D_k^\beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}] f(x)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^m} (\mathrm{i}k)^\alpha (-\mathrm{i}x)^\beta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^m} \left[(\mathrm{i}k)^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\right] (-\mathrm{i}x)^\beta f(x)dx \\
&= \int_{\mathbf{R}^m} \left[(-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\right] (-\mathrm{i}x)^\beta f(x)dx
\end{aligned}$$

denn wegen $f \in \mathcal{S}$ dürfen wir die Ableitungen D_k^β mit $\int_{\mathbf{R}^m} \ldots dx$ vertauschen. Partielle Integration bzgl. D_x^α ergibt nun

$$(\mathrm{i}k)^\alpha (D_k^\beta \hat{f})(k) = (2\pi)^{-m/2}(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} D_x^\alpha \left[(-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right] dx.$$

Daher gilt (7.3) und

$$\begin{aligned}\left\|\hat{f}\right\|_{\alpha,\beta} &=_{(\mathrm{Def})} \sup_k \left|k^\alpha (D^\beta \hat{f})(k)\right| \\ &\leq (2\pi)^{-m/2} \int \left|D_x^\alpha (x^\beta f)\right| dx < \infty.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\hat{}$ bildet $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ab.
Für hinreichend großes $r \in \mathbf{N}$ ist $\int (1+|x|^2)^{-r} dx < \infty$, so daß

$$\begin{aligned}\left\|\hat{f}\right\|_{\alpha,\beta} &\leq (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} (1+|x|^2)^{-r}(1+|x|^2)^r \left|D_x^\alpha (-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right| dx \\ &\leq (2\pi)^{-m/2} \left(\int_{\mathbf{R}^m} (1+|x|^2)^{-r} dx\right) \cdot \sup_x \left\{(1+|x|^2)^r \left|D_x^\alpha (-\mathrm{i}x)^\beta f(x)\right|\right\}.\end{aligned}$$

Wenn wir nun auf der R.S. in der geschweiften Klammer die Leibniz-Regel anwenden, folgt, daß es endlich viele Multi-Indizes α_j, β_j und Konstanten c_j gibt mit

$$\left\|\hat{f}\right\|_{\alpha,\beta} \leq \sum_{j=1}^{M} c_j \left\|f\right\|_{\alpha_j,\beta_j}.$$

Mit Theorem 2.14 folgt damit die Stetigkeit von $\hat{}: \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$. ∎

7.3. Theorem. (Fourier)
Die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist bijektiv und stetig (mit stetiger Inverser). Die Umkehrabbildung wird durch $\mathcal{F}^{-1} = \check{}$ gegeben, d.h., für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ gilt $\check{\hat{f}} = f = \hat{\check{f}}$.

Für den Beweis von Thm. 7.3 benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

7.4. Lemma. *Es sei $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ stetig diffbar und 2π-periodisch. Dann konvergiert die* Fourier-Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad \text{mit } a_n := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx} f(x) dx,$$

gleichmäßig gegen f.

Beweis. Übung, Analysis I. ∎

7.5. Lemma. *Die Familie $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\right)_{n\in\mathbf{Z}}$ bildet eine ONB im Hilbertraum $L_2(0,2\pi)$.*

Beweis. Folgt mit ÜA 39 und 40. ∎

Wir verwenden im Beweis von Theorem 7.3 die folgende Notation:

Für $\varepsilon > 0$ sei

$$Q_\varepsilon := \{x \in \mathbf{R}^m \; ; \; |x_j| < 1/\varepsilon, \; j = 1, \ldots, m\}$$

der Würfel mit achsenparallelen Kanten der Länge $2/\varepsilon$ und Mittelpunkt 0; insbes. ist $\mathrm{vol}\,(Q_\varepsilon) = (2/\varepsilon)^m$. Weiter sei

$$K_\varepsilon := \{k \in \mathbf{R}^m \; ; \; k_j \in \varepsilon\pi\mathbf{Z}, \; j = 1, \ldots, m\} = (\varepsilon\pi\mathbf{Z})^m$$

(d.h., $k_j/\varepsilon\pi$ ist eine ganze Zahl.)

7.6. Lemma.
Sei $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ und sei $0 < \varepsilon \le 1$ so, daß $\mathrm{supp} f \subset Q_\varepsilon$. Dann gilt für alle $x \in Q_\varepsilon$

$$f(x) = \sum_{k \in K_\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \cdot \left(\int_{Q_\varepsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y} f(y) dy\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}; \tag{$*$}$$

die Reihe konvergiert dabei **gleichmäßig** *auf Q_ε.*

Bemerkung. Die Funktionen

$$\Phi_{k,\varepsilon} := \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}, \qquad k \in K_\varepsilon,$$

bilden eine ONB von $L_2(Q_\varepsilon)$, nach Lemma 7.5. Wir verwenden im folgenden eine Hilbertraum-Schreibweise mit Skalarprodukt

$$\langle f \, , \, g\rangle_{Q_\varepsilon} := \int_{Q_\varepsilon} f(x)\overline{g(x)} dx,$$

für $f, g \in L_2(Q_\varepsilon)$. Für die Summanden auf der RS von $(*)$ in Lemma 7.6 gilt daher

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^m \cdot \left(\int_{Q_\varepsilon} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y} f(y) dy\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} = \langle f \, , \, \Phi_{k,\varepsilon}\rangle_{Q_\varepsilon} \Phi_{k,\varepsilon}, \qquad k \in K_\varepsilon.$$

Beweis. (Lemma 7.6) Es sei

$$a_k(f) := a_{k,\varepsilon}(f) := \langle f \, , \, \Phi_{k,\varepsilon}\rangle_{Q_\varepsilon} = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2} \int_{Q_\varepsilon} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} dx, \qquad k \in K_\varepsilon.$$

Da $(\Phi_{k,\varepsilon})_{k \in K_\varepsilon}$ eine ONB von $L_2(Q_\varepsilon)$ bildet, konvergiert die Reihe

$$\sum_{k \in K_\varepsilon} a_k(f) \Phi_{k,\varepsilon}$$

in $L_2(Q_\varepsilon)$ und liefert genau f. Hierbei ist nach Parseval

$$\sum_{k \in K_\varepsilon} |a_k(f)|^2 = \|f\|^2_{L_2(Q_\varepsilon)} = \int_{Q_\varepsilon} |f(y)|^2 dy < \infty.$$

Analog gilt für die Ableitungen von f

$$\sum_{k\in K_\varepsilon} |a_k(D^\alpha f)|^2 < \infty, \qquad \forall \alpha \in \mathbf{N}_0^m.$$

Nach der üblichen Rechnung (partielle Integration!) gilt aber

$$a_k(D^\alpha f) = (\mathrm{i}k)^\alpha a_k(f), \qquad k \in K_\varepsilon, \quad \alpha \in \mathbf{N}_0^m.$$

Daher ist für alle $r > 0$

$$\sum_{k\in K_\varepsilon} (1+|k|^2)^{2r} |a_k(f)|^2 < \infty. \tag{7.4}$$

Für hinreichend großes r ist

$$\sum_{k\in K_\varepsilon} (1+|k|^2)^{-2r} < \infty,$$

und wir erhalten aus (7.4) mit der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned}\sum_{k\in K_\varepsilon} |a_k(f)| &= \sum_{k\in K_\varepsilon} (1+|k|^2)^{-r}(1+|k|^2)^r |a_k(f)| \\ &\le \left[\sum_{k\in K_\varepsilon} (1+|k|^2)^{-2r}\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{k\in K_\varepsilon} (1+|k|^2)^{2r}|a_k(f)|^2\right]^{1/2} < \infty.\end{aligned}$$

Aus der (absoluten) Summierbarkeit der Fourierkoeffizienten $a_k(f)$ folgt (wegen $\|\Phi_{k,\varepsilon}\|_\infty \le 1$ für alle $0 < \varepsilon \le 1$ und alle $k \in K_\varepsilon$) sofort die *gleichmäßige* Konvergenz der Reihe $\sum_{k\in K_\varepsilon} a_k(f)\Phi_{k,\varepsilon}$. Da wir außerdem schon wissen, daß die Reihe in $L_2(Q_\varepsilon)$ gegen f konvergiert, muß der gleichmäßige Limes punktweise (fast überall) für jedes $x \in Q_\varepsilon$ mit f übereinstimmen. ∎

Beweis von Theorem 7.3. Wir wissen bereits, daß $\check{}$ und $\hat{}$ stetige Abb. von $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ nach $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ sind, und es bleibt nur noch $f = \check{\hat{f}}$, für alle $f \in \mathcal{S}$, zu zeigen.
Wegen der Stetigkeit von $\check{}$ und $\hat{}$ und weil $C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ dicht ist in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ (ÜA), genügt es sogar, $f = \check{\hat{f}}$ für alle $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ zu zeigen.
Sei $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ und $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\operatorname{supp} f \subset Q_\varepsilon$. Nach Lemma 7.6 gilt dann für $x \in Q_\varepsilon$

$$f(x) = \sum_{k\in K_\varepsilon} (2\pi)^{-m/2} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} (\pi\varepsilon)^m, \tag{7.5}$$

da $\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot y} f(y)dy = (2\pi)^{m/2}\hat{f}(k)$.
Da $\mathbf{R}^m$ als disjunkte Vereinigung von Standard-Quadern mit Volumen $(\pi\varepsilon)^m$ und Mittelpunkten $k \in K_\varepsilon$ dargestellt werden kann, ist die rechte Seite von (7.5) eine Riemann-Summe (allerdings mit abzählbar unendlich vielen Summanden!) für das Integral der

Funktion $(2\pi)^{-m/2}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}$. Nach Satz 7.2 ist $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, also auch $\hat{f}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, und daher konvergiert die Riemann-Summe gegen das Integral, d.h., es gilt

$$\sum_{k\in K_\varepsilon} (2\pi)^{-m/2}\hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}(\pi\varepsilon)^m \to (2\pi)^{-m/2}\int_{\mathbf{R}^m} \hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}dk, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

also, mit (7.5),

$$f(x) = (2\pi)^{-m/2}\int \hat{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}dk = \check{\hat{f}}.$$

∎

Bem.: Aus den in Theorem 7.3 bewiesenen Relationen folgt sofort die Injektivität und die Surjektivität der FT.

Beispiel. (Gaußfunktion) Für $f(x) := \mathrm{e}^{-\alpha x^2/2}$ mit $\alpha > 0$ gilt

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\mathrm{e}^{-k^2/2\alpha}.$$

Insbesondere ist die Funktion $\mathrm{e}^{-x^2/2}$ invariant unter $\mathcal{F}$. (ÜA)

Als nächstes beweisen wir eine Vorstufe des Satzes von Plancherel:

7.7. Theorem. *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ gilt*

$$\int_{\mathbf{R}^m} |\hat{f}(k)|^2 dk = \int_{\mathbf{R}^m} |f(x)|^2 dx. \tag{7.6}$$

Beweis. Sei zunächst $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ und sei $\varepsilon > 0$ so klein, daß $\mathrm{supp} f \subset Q_\varepsilon$. Da die Funktionen

$$\Phi_{k,\varepsilon} := \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\cdot x}, \qquad k \in K_\varepsilon,$$

eine ONB von $L_2(Q_\varepsilon)$ bilden, gilt nach Parseval

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^m} |f(x)|^2 dx &= \int_{Q_\varepsilon} |f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{k\in K_\varepsilon} |\langle f\,,\,\Phi_{k,\varepsilon}\rangle|^2 \\ &= \sum_{k\in K_\varepsilon} \left|\hat{f}(k)\right|^2 (\pi\varepsilon)^m,\end{aligned} \tag{$*$}$$

da $\langle f\,,\,\Phi_{k,\varepsilon}\rangle = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{m/2}\int f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}dx = (\varepsilon\pi)^{m/2}\hat{f}(k)$.
Der letzte Term in $(*)$ ist eine Riemann-Summe für das Integral $\int_{\mathbf{R}^m}|\hat{f}(k)|^2dk$; wegen $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ konvergiert diese Riemann-Summe mit $\varepsilon \downarrow 0$ gegen das Integral, d.h.,

$$\sum_{k\in K_\varepsilon} \left|\hat{f}(k)\right|^2 (\pi\varepsilon)^m \to \int_{\mathbf{R}^m} |\hat{f}(k)|^2 dk, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

und die Behauptung folgt für $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$.
Sei nun $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$. Dann gibt es eine Folge $(\varphi_n) \subset C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ mit $\varphi_n \to f$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, also auch $\varphi_n \to f$ in $L_2(\mathbf{R}^m)$. Da $\hat{}: \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ stetig ist, folgt $\hat{\varphi}_n \to \hat{f}$ in $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ und somit auch in L_2. $\implies$

$$\int |f(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int |\varphi_n(x)|^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int |\hat{\varphi}_n(k)|^2 dk = \int |\hat{f}(k)|^2 dk.$$

∎

7.8. Theorem. (Plancherel) *Die Fouriertransformation $\mathcal{F}: \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ läßt sich (in eindeutiger Weise) zu einer unitären Abbildung $\mathcal{F} : L_2(\mathbf{R}^m) \to L_2(\mathbf{R}^m)$ fortsetzen.*

Theorem 7.8 folgt sofort aus Thm. 7.7 mit Hilfe des BLT-Theorems aus der FA I:

Das BLT-Theorem. ([RS-I])
Seien X, Y Banachräume und sei $X_0 \subset X$ ein dichter Teilraum. Sei $A_0: X_0 \to Y$ ein beschränkter linearer Operator, d.h., es gibt eine Konstante $C \geq 0$ mit

$$\|A_0 x\|_Y \leq C \|x\|_X , \qquad \forall x \in X_0.$$

Dann läßt sich A_0 zu einem beschränkten linearen Operator $A: X \to Y$ fortsetzen. Diese Fortsetzung ist eindeutig bestimmt und es gilt $\|A\| = \|A_0\|$.

Bemerkung. $\mathcal{F} : L_2 \to L_2$ *unitär* bedeutet, daß die Abbildungen $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*$ und $\mathcal{F}$ isometrisch und bijektiv, also Isomorphismen von $L_2(\mathbf{R}^m)$, sind. Insbesondere gilt

$$\langle u , v \rangle = \langle \mathcal{F}u , \mathcal{F}v \rangle , \quad \forall u, v \in L_2(\mathbf{R}^m).$$

Durch Dualisierung können wir die FT auf $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ fortsetzen:

7.9. Definition. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ definieren wir $\hat{T}$, die FT von T, durch

$$\hat{T}(\varphi) := T(\hat{\varphi}), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m). \tag{7.7}$$

7.10. Bemerkungen.
(a) Wegen $\hat{} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig und $T : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ stetig ist $\hat{T} : \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ stetig.
(b) Fortsetzungseigenschaft: Für $f \in \mathcal{S}$ gilt

$$\begin{aligned} \ell_{\hat{f}}(\varphi) &= \int \hat{f}(x)\varphi(x)dx = \left\langle \hat{f} , \overline{\varphi} \right\rangle_{L_2} \\ &= \left\langle \hat{f} , \hat{\check{\overline{\varphi}}} \right\rangle_{L_2} =_{\text{Thm. 7.8}} \left\langle f , \check{\overline{\varphi}} \right\rangle_{L_2} \\ &= \left\langle f , \overline{\hat{\varphi}} \right\rangle_{L_2} = \int f(x)\hat{\varphi}(x)dx = \ell_f(\hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Damit ist $\ell_{\hat{f}} = \widehat{\ell_f}$ gezeigt. ∎

7.11. Theorem. *Die in Def. 7.9 erklärte Trafo* $\hat{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ *ist stetig und bijektiv, mit stetiger Inverser (Stetigkeit bezgl. der* $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$*-Topologie auf* $\mathcal{S}'$*). Die Inverse wird dabei durch* $\check{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ *gegeben, mit*

$$\check{T}(\varphi) := T(\check{\varphi}), \qquad T \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Die Einschränkungen von $\hat{}$ *und* $\check{}$ *auf* $\mathcal{S}$ *stimmen mit den in Def. 7.1 erklärten Abbildungen überein.*
Die Fortsetzungen von $\hat{}$ *bzw.* $\check{}$ *von* $\mathcal{S}$ *auf* $\mathcal{S}'$ *sind jeweils eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir haben $\hat{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ als den zu $\hat{}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ adjungierten Operator definiert (vgl. Def. 7.9). Daher ist $\hat{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ stetig bzgl. der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie von $\mathcal{S}'$. In Bem. 7.10 haben wir nachgerechnet, daß $\hat{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ in der Tat Fortsetzung von $\hat{}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist.
(Tatsächlich kann man aber auch sofort *direkt* beweisen, daß $\hat{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ stetig ist: Sei $(T_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{S}'$ ein Netz mit $T_\alpha \to T \in \mathcal{S}'$ in der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie. $\implies$

$$\hat{T}_\alpha(\varphi) = T_\alpha(\hat{\varphi}) \to T(\hat{\varphi}) = \hat{T}(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

also $\hat{T}_\alpha \to \hat{T}$ in $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$.)
Zur Eindeutigkeit: Nach Korollar 5.10 ist $\mathcal{S}$ dicht in $\mathcal{S}'$ und daher kann $\hat{}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ höchstens *eine* schwach stetige Fortsetzung auf $\mathcal{S}'$ besitzen.
Alle bisher gemachten Aussagen gelten natürlich analog auch für $\check{}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ und $\check{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$.
Beh.: Für $T \in \mathcal{S}'$ ist $\check{\hat{T}} = T = \hat{\check{T}}$.
Beweis der Beh.: Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\check{\hat{T}}(\varphi) = \hat{T}(\check{\varphi}) = T(\hat{\check{\varphi}}) = T(\varphi),$$

da $\hat{\check{\varphi}} = \varphi$, für alle $\varphi \in \mathcal{S}$. $\implies$ $\check{\hat{T}} = T$.
Analog zeigt man $\hat{\check{T}} = T$. •
$\check{\hat{T}} = T \implies \hat{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist injektiv.
$\hat{\check{T}} = T \implies \hat{}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist surjektiv. ∎

7.12. Beispiel. (Fouriertrafo von δ_b')
Sei $b \in \mathbf{R}$ und $\delta_b'(\varphi) = -\varphi'(b)$, für alle $\varphi \in \mathcal{S}$. Nach Def. 7.9 gilt dann

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta_b'}(\varphi) = \delta_b'(\hat{\varphi}) &= -\left(\frac{d}{dk}\hat{\varphi}\right)(k)|_{k=b} \\
&= -\left((2\pi)^{-1/2}\frac{d}{dk}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\varphi(x)dx\right)_{k=b} \\
&= -(2\pi)^{-1/2}\left(\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}(-\mathrm{i}x)\varphi(x)dx\right)_{k=b} \\
&= \int \frac{\mathrm{i}x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx}}{\sqrt{2\pi}}\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Die Fouriertrafo von δ_b' wird also durch die Funktion $(2\pi)^{-1/2}(\mathrm{i}x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}bx} \in \mathcal{O}^1 \hookrightarrow \mathcal{S}'$ gegeben.

Eine der wichtigsten Operationen mit Funktionen und/oder Distributionen ist die *Faltung* ("convolution"):

7.13. Definition. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ definieren wir $f * g$, die *Faltung von f und g*, durch

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbf{R}^m} f(y-x)g(x)dx.$$

Da $f, g \in \mathcal{S}$ existieren alle Integrale. Wir wollen als nächstes zeigen, daß $f*g \in \mathcal{S}$ ist und daß $*\colon \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig ist. Anschließend setzen wir $*$ zu einer linearen Abbildung von $\mathcal{S}' \times \mathcal{S} \to \mathcal{O}^m$ (mit passenden Stetigkeitseigenschaften) fort.
Beachte: I.a. ist die Faltung zweier Distributionen aus $\mathcal{S}'$ *nicht* definiert.

7.14. Theorem.
(a) Für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist die Abb.

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \ni g \mapsto f * g$$

stetig von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$.
(b) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-m/2}\hat{f} * \hat{g}$ und $\widehat{f*g} = (2\pi)^{m/2}\hat{f}\cdot\hat{g}$, für alle $f, g \in \mathcal{S}$.
(c) Für $f, g, h \in \mathcal{S}$ gilt $f * g = g * f$ und $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Beweis. Nach Thm. 7.8 ist $\hat{}\colon L_2 \to L_2$ unitär und daher gilt

$$\langle \varphi\,,\,\psi\rangle_{L_2} = \left\langle \hat{\varphi}\,,\,\hat{\psi}\right\rangle_{L_2}, \qquad \varphi, \psi \in \mathcal{S}. \tag{7.8}$$

Seien $f, g \in \mathcal{S}$. Wir halten nun $y \in \mathbf{R}^m$ fest und wenden (7.8) an auf $\varphi := g$ und $\psi := \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot x}\overline{f(x)}$, und erhalten

$$\left\langle g\,,\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot x}\overline{f}\right\rangle_{L_2} = \left\langle \hat{g}\,,\,\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot x}\overline{f}}\right\rangle_{L_2}.$$

Für die L.S. rechnen wir aus

$$\left\langle g\,,\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot x}\overline{f}\right\rangle_{L_2} = \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot x}f(x)g(x)dx = (2\pi)^{m/2}\widehat{fg}(y),$$

während die R.S. das folgende ergibt:

$$\begin{aligned}
\left\langle \hat{g}\,,\,\widehat{\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot x}\overline{f}}\right\rangle_{L_2} &= \int_{\mathbf{R}^m} \hat{g}(k)\left\{\overline{(2\pi)^{-m/2}\int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot x}\overline{f(x)}dx}\right\}dk \\
&= \int_{\mathbf{R}^m} \hat{g}(k)\left\{(2\pi)^{-m/2}\int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y-k)\cdot x}f(x)dx\right\}dk \\
&= \int_{\mathbf{R}^m} \hat{f}(y-k)\hat{g}(k)dk \\
&= (\hat{f} * \hat{g})(y).
\end{aligned}$$

Dies beweist
$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-m/2} \hat{f} * \hat{g}. \tag{\#}$$
Analog gilt mit $\check{}$ anstelle von $\hat{}$
$$(fg)\check{} = (2\pi)^{-m/2} \check{f} * \check{g}. \tag{\#'}$$
Wenn wir in ($\sharp'$) die Funktionen f und g durch $\hat{f}$ und $\hat{g}$ ersetzen und anschließend $\widehat{}$ anwenden, erhalten wir
$$\hat{f} \cdot \hat{g} = (2\pi)^{-m/2} \widehat{f * g}.$$
Die Beh. (c) folgt sofort aus (b). Die Beh. (c) folgt sofort aus (b). ∎

Um die Abb. $C_f: g \mapsto f * g$ auf $\mathcal{S}'$ fortzusetzen, suchen wir nach einer stetigen Abb. $R_f: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ mit der Eigenschaft
$$R_f'|_{\mathcal{S}} = C_f.$$
Dann nämlich liefert R_f' die gesuchte Fortsetzung der Faltung C_f auf $\mathcal{S}'$.

7.15. Definition. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ sei $\tilde{f}(x) := f(-x)$. Für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ definieren wir dann $T * f$, die Faltung von T und f, durch
$$(T * f)(\varphi) := T(\tilde{f} * \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Bemerkung: Da $\varphi \mapsto \tilde{f} * \varphi$ stetig von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, ist das oben definierte $T * f$ in der Tat aus $\mathcal{S}'$.

Notation: $f_y(x) := f(x - y)$, $\tilde{f}_y(x) = f(y - x)$.

7.16. Theorem. *Für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist die Abb.*
$$\mathcal{S}' \ni T \mapsto T * f \in \mathcal{S}'$$
schwach-stetig. Weiter gilt*
(a) $T * f \in \mathcal{O}^m$, d.h., $T * f \in C^\infty(\mathbf{R}^m)$ mit polynomiell beschränkten Ableitungen. Für die Funktion $T * f$ ist $(T * f)(y) = T(\tilde{f}_y)$ und
$$D^\beta(T * f) = (D^\beta T) * f = T * (D^\beta f), \qquad \beta \in \mathbf{N}_0^m. \tag{7.9}$$
(b) $(T * f) * g = T * (f * g)$, für alle $T \in \mathcal{S}'$, $f, g \in \mathcal{S}$.
(c) $\widehat{fT} = (2\pi)^{-m/2} \hat{f} * \hat{T}$ und $\widehat{T * f} = (2\pi)^{m/2} \hat{f}\hat{T}$.

Beweis. Wir haben die Abb. $\mathcal{S}' \ni T \mapsto T * f$ definiert als die Adjungierte Abb. zur Faltung mit $\tilde{f}$. $\implies$ Die Abb.
$$\mathcal{S}' \ni T \mapsto T * f \in \mathcal{S}'$$

ist schwach*-stetig (vgl. Satz 4.11).
Gl. (7.9) und die Aussagen in (b), (c) folgen direkt aus den entsprechenden Aussagen für $T \in \mathcal{S}$ und den folgenden Tatsachen:
(i) $\mathcal{S}$ ist dicht in $\mathcal{S}'$ in der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie.
(ii) Die Operationen $\mathcal{F}$, D^β, Multiplikation mit $\hat{f}$, sind alle schwach*-stetig auf $\mathcal{S}'$.
(ÜA)
Daher müssen wir nur noch den ersten Teil von (a) beweisen:
Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$. Nach dem Regularitätssatz für temperierte Distributionen (Kor. 5.12 oder Thm. 4.14) gibt es eine beschränkte, stetige Funktion h, ein $r \in \mathbf{N}$ und einen Multiindex β mit

$$T(\varphi) = \int_{\mathbf{R}^m} h(x)(1+x^2)^r D^\beta \varphi(x) dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S};$$

dabei bedeutet $x^2 = x \cdot x = x_1^2 + \ldots + x_m^2 = |x|^2$. Speziell für $\varphi := \tilde{f}_y$ gilt daher

$$T(\tilde{f}_y) = \int_{\mathbf{R}^m} h(x)(1+x^2)^r (D^\beta f)(y-x) dx.$$

Da $D^\beta f \in \mathcal{S}$, kann man (zB nach Lebesgue) unterm Integral nach y differenzieren
$\Longrightarrow \quad T(\tilde{f}_y)$ ist eine ∞-oft diffbare Funktion von y.
Unter der Substitution $\tau := y - x$ folgt

$$\begin{aligned} \left| T(\tilde{f}_y) \right| &\leq \|h\|_\infty \int_{\mathbf{R}^m} (1+x^2)^r |(D^\beta f)(y-x)| dx \\ &= \|h\|_\infty \int_{\mathbf{R}^m} (1+(y-\tau)^2)^r |(D^\beta f)(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Hierin ist $(y-\tau)^2 = |y-\tau|^2 \leq 2|y|^2 + 2|\tau|^2$, also

$$1 + (y-\tau)^2 \leq (1+2y^2)(1+2\tau^2) \leq 4(1+y^2)(1+\tau^2).$$

Wegen $(1+\tau^2)^j D^\beta f(\tau) \in \mathcal{S}$, für alle j, folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| T(\tilde{f}_y) \right| &\leq C \cdot (1+y^2)^r \int (1+\tau^2)^r |D^\beta f(\tau)| d\tau \\ &= C'(1+y^2)^r. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad T(\tilde{f}_y)$ ist polynomiell beschränkt.
Analog zeigt man, daß auch $D^\alpha T(\tilde{f}_y)$ polynomiell beschränkt ist für alle $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$.
Damit ist $T(\widetilde{f_y}) \in \mathcal{O}^m$ gezeigt.

Es sei nun $S \in \mathcal{S}'$ eine Distribution, die von einer polynomiell beschränkten, stetigen Funktion s erzeugt wird, d.h., es ist $S = \ell_s$. Für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ gilt dann

$$\begin{aligned}
(S * f)(\varphi) &=_{\text{Def. 7.15}} S(\tilde{f} * \varphi) \\
&=_{S=\ell_s} \int s(x) \left(\int \tilde{f}(x-y)\varphi(y)dy \right) dx \\
&=_{\text{Fubini}} \int \left(\int s(x)\widetilde{f_y}(x)dx \right) \varphi(y)dy \\
&= \int (s * f)(y)\varphi(y)dy \\
&= \int \left(S(\widetilde{f_y}) \right) \varphi(y)dy \\
&= \left(S(\widetilde{f_y}) \right)(\varphi),
\end{aligned}$$

also

$$(S * f)(y) = S(\widetilde{f_y}). \tag{7.10}$$

Wir kehren jetzt wieder zu $T \in \mathcal{S}'$ zurück. Nach dem Regularitätssatz gibt es eine polynomiell beschränkte, stetige Fkt. s und ein $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ mit

$$T = D^\alpha S, \qquad S := \ell_s.$$

Daher folgt mit Gl. (7.10)

$$\begin{aligned}
(T * f)(y) &= ((D^\alpha S) * f)(y) = (S * D^\alpha f)(y) \\
&= S\left((D^\alpha f)\widetilde{}_y\right) = (-1)^{|\alpha|} S(D^\alpha(\widetilde{f_y})) \\
&= (D^\alpha S)(\widetilde{f_y}) = T(\widetilde{f_y}).
\end{aligned}$$

Dies beendet den Beweis. ∎

7.17. Theorem. *Es seien $T \in \mathcal{S}'$ und $f \in \mathcal{S}$. Dann ist $\widehat{fT} \in \mathcal{O}^m$ und für die Funktion $\widehat{fT}$ gilt*

$$\widehat{fT}(k) = (2\pi)^{-m/2} T(f\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}).$$

Wenn $T \in \mathcal{S}'$ außerdem kompakten Träger besitzt und $\psi \in \mathcal{S}$ die Eigenschaft

$$\psi(x) = 1, \qquad \forall x \in \operatorname{supp} T,$$

hat, dann gilt

$$\hat{T}(k) = (2\pi)^{-m/2} T(\psi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}).$$

Beweis. Nach Thm. 7.16 (c) gilt

$$\widehat{fT} = (2\pi)^{-m/2} \hat{f} * \hat{T}.$$

Nach Theorem 7.16(a) ist daher $\widehat{fT} \in \mathcal{O}^m$ und wir haben die Formel

$$\widehat{fT}(k) = (2\pi)^{-m/2}\hat{f} * \hat{T} = (2\pi)^{-m/2}\hat{T}\left(\widetilde{(\hat{f})_k}\right); \tag{$*$}$$

die letzte Gleichheit folgt wieder aus Def. 7.15. Auf der RS von $(*)$ ist aber

$$\begin{aligned}\hat{f}(k-\lambda) &= (2\pi)^{-m/2}\int \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-\lambda)\cdot x} f(x)dx \\ &= (2\pi)^{-m/2}\int \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\right]dx \\ &= \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\right]\check{}(\lambda),\end{aligned}$$

und wir sehen daß

$$\hat{T}\left(\widetilde{(\hat{f})_k}\right) = \hat{T}(\hat{f}(k-.)) = \hat{T}((\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f(x))\,\check{}\,) = T(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f).$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß

$$\widehat{fT}(k) = (2\pi)^{-m/2}T(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} f).$$

∎

Zum Abschluß dieses Paragraphen betrachten wir noch die *Glättung* mit einer Schar von Funktionen aus $\mathcal{S}$, die sich um den Nullpunkt konzentriert:

7.18. Definition. Sei $0 \le j \in C_c^\infty(B_1)$ mit $\int_{\mathbf{R}^m} j(x)dx = 1$. Die Schar $(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ mit

$$j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-m} j(x/\varepsilon)$$

nennt man eine *"Approximation der Identität"* oder eine δ- *"Schar."*

Die Bezeichnung ist dadurch gerechtfertigt, daß

$$j_\varepsilon * f \to f \text{ in } \mathcal{S}, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

und

$$j_\varepsilon * T \to T \text{ in } \mathcal{S}', \qquad \varepsilon \downarrow 0.$$

Dabei ist $j_\varepsilon * T \in \mathcal{O}^m$, man appproximiert also die Distribution T durch eine glatte Funktion aus $\mathcal{O}^m$. Diese Art der Glättung durch Faltung mit einer Schar $(j_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ wird häufig KO Friedrichs zugeschrieben (Friedrichs'sche Glättung, engl.: Friedrichs mollifier).
Bemerkung. Auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist natürlich δ eine (distributionelle) Einheit für die Faltung, d.h.,

$$\delta * f = f, \qquad \forall f \in \mathcal{S}.$$

7.19. Lemma. *Für alle $f \in \mathcal{S}$ gilt*

$$(2\pi)^{m/2}\widehat{j_\varepsilon} \cdot f \to f \text{ in } \mathcal{S}.$$

Beweis: ÜA

7.20. Satz. *Für $f \in \mathcal{S}$ gilt*

$$j_\varepsilon * f \to f \text{ in } \mathcal{S}.$$

Beweis. Nach Lemma 7.19 (mit $\hat{f}$ anstelle von f) haben wir

$$(2\pi)^{m/2}\widehat{j_\varepsilon} \cdot \hat{f} \to \hat{f}.$$

Wegen Thm. 7.16 ist aber $(2\pi)^{m/2}\widehat{j_\varepsilon} \cdot \hat{f} = \widehat{j_\varepsilon * f}$, und wir sehen, daß

$$\widehat{j_\varepsilon * f} \to \hat{f} \text{ in } \mathcal{S}.$$

Daraus folgt mit Thm. 7.3 sofort, daß $j_\varepsilon * f \to f$ in $\mathcal{S}$. ∎

7.21. Satz. *Für $T \in \mathcal{S}'$ gilt*

$$T * j_\varepsilon \to T, \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

in der schwach--Topologie von $\mathcal{S}'$.*

Beweis. Nach Satz 7.20 gilt

$$\widetilde{j_\varepsilon} * \varphi \to \varphi \text{ in } \mathcal{S}(\mathbf{R}^m), \qquad \varepsilon \downarrow 0,$$

und es folgt $T(\widetilde{j_\varepsilon} * \varphi) \to T(\varphi)$. Wegen $(T * j_\varepsilon)(\varphi) = T(\widetilde{j_\varepsilon} * \varphi) = (j_\varepsilon * T)(\varphi)$ folgt die Beh. ∎