## ¶7. Der Satz von Hahn-Banach.

In vielen Fällen benötigt man lineare Funktionale mit speziellen Eigenschaften (etwa Stützmannigfaltigkeiten an konvexe Mengen, Trennung von Punkten). Hier verschafft man sich zunächst das gewünschte Funktional auf einem (endlich-dimensionalen) Teilraum und setzt es dann auf den ganzen BR fort. Für diesen Fortsetzungsprozess verwendet man den Satz von Hahn-Banach.

**7.1. Definition.** Sei $X$ ein (reeller oder komplexer) VR, $Y \subset X$ ein linearer TR, und

$$\lambda : Y \to \mathbf{C} \quad (\text{oder } \mathbf{R})$$

linear. Ein lineares Funktional $\Lambda : X \to \mathbf{C}$ (oder $\mathbf{R}$) heißt eine *Fortsetzung* von $\lambda$ auf $X$, falls

$$\Lambda|_Y = \lambda.$$

Der Satz von Hahn-Banach stützt sich auf das **Lemma von Zorn**, das zum Auswahlaxiom äquivalent ist.

**7.2. Definition.** Sei $M$ eine Menge und $\mathcal{R}$ eine Relation auf $M$, d.h., $\mathcal{R} \subset M \times M$. $\mathcal{R}$ heißt eine *Halbordnung* ("partial ordering"), falls $\mathcal{R}$ reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch ist (*anti-symmetrisch* bedeutet: $x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \quad \Longrightarrow \quad x = y$).

**Bezeichnung:** Ähnlich wie bei Äquivalenzrelationen führt man für Halbordnungen ein spezielles Symbol ein: statt $x\mathcal{R}y$ schreibt man

$$x \prec y, \qquad \text{"}x \text{ geht } y \text{ voran"}.$$

*Bemerkung.* Zwei Elemente $x,\ y \in M$ brauchen bei einer Halbordnung nicht in Relation zueinander zu stehen; z.Bp. ist $\mathcal{R} := \{(x,x)\,;\, x \in M\}$ eine Halbordnung auf $M$.

**7.3. Beispiel.** Sei $Y$ eine Menge, $\mathcal{P} = \{0,1\}^Y (= 2^Y)$ die Menge aller Teilmengen von $Y$ (Potenzmenge). Definiere

$$A \prec B \quad :\Longleftrightarrow \quad A \subset B,$$

für $A,\ B \in \mathcal{P}$. Dann ist $\prec$ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}$.

**7.4. Definition.**

(a) Sei $M$ eine Menge mit Halbordnung $\prec$ und sei $K \subset M$. Wenn für alle $x,\ y \in K$ stets $x \prec y$ oder $y \prec x$ gilt, so heißt $K$ *linear geordnet*, oder eine *Kette*. (Z.Bp. ist $\mathbf{R}$ mit der durch $\leq$ gegebenen Ordnung linear geordnet.)

(b) Sei $M$ halbgeordnet bezgl. $\prec$ und sei $N \subset M$. Ein Element $p \in M$ heißt eine *obere Schranke von $N$*, falls

$$x \prec p, \quad \forall x \in N.$$

(c) Sei $q \in M$ mit der Eigenschaft, daß

$$\forall m \in M : (q \prec m \quad \Longrightarrow \quad q = m);$$

dann heißt $q$ ein *maximales Element.*

**Bild!** "Graph mit Knoten in Form eines Y"

*Erläuterung.* (vgl. [Dug]) Wenn $q$ ein maximales Element ist, so bedeutet das keineswegs, daß für alle $m \in M$ notwendigerweise $m \prec q$ gilt; *wenn* jedoch ein $m \in M$ in Relation zu $q$ steht, dann gilt $m \prec q$. Ein maximales Element hat keine "Nachfolger", oder, salopp gesagt: "Rechts von einem maximalen Element kommt nichts mehr."

**7.5. Lemma von Zorn.**
*Sei $\emptyset \neq M$ eine halbgeordnete Menge mit der Eigenschaft, daß jede Kette $K \subset M$ eine obere Schranke in $M$ besitzt.*
*Dann gibt es zu jeder Kette eine obere Schranke, die zugleich ein maximales Element von $M$ ist.*

Ohne Beweis. Mengenlehre ([Dugundji]): Lemma von Zorn $\Leftrightarrow$ Auswahlaxiom $\Leftrightarrow$ Wohlordnungssatz (Zermelo).

### • Eine Anwendung des Lemmas von ZORN: Hamel-Basen

**7.6. Definition.**
(a) Sei $X$ ein linearer Raum, $U \subset X$. Wir sagen, $U$ *ist linear unabhängig*, wenn für alle $k \in \mathbf{N}$ jedes $k$-Tupel von paarweise verschiedenen Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in U$ linear unabhängig ist.

(b) Sei $X$ ein VR, $A$ eine Indexmenge, und $H := (x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$ eine Menge von Vektoren mit den folgenden Eigenschaften:
 ($i$) $H$ ist linear unabhängig;
 ($ii$) Jedes $x \in X$ läßt sich (eindeutig) als *endliche* Linearkombination von gewissen $x_\alpha$ schreiben.
Dann heißt $H$ eine *algebraische Basis* oder *Hamelbasis* von $X$.

Aus dem Lemma von ZORN folgt leicht die Existenz von Hamelbasen:

**7.7. Satz.** *Jeder VR $X$ (mit $X \neq \{0\}$) besitzt eine algebraische Basis.*

**Beweis.** Sei
$$\mathcal{F} := \{U \subset X \,;\, U \text{ linear unabhängig } \}.$$
Mit der durch $\subset$ gegebenen Halbordnung ist $(\mathcal{F}, \subset)$ eine halbgeordnete Menge.
Für eine Kette $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ setzen wir
$$S := \bigcup_{U \in \mathcal{F}_0} U$$
und überlegen, daß $S \in \mathcal{F}$ gilt und daß $S$ eine obere Schranke der Kette $\mathcal{F}_0$ ist.
Wir können daher das ZORNsche Lemma anwenden, das uns die Existenz eines maximalen Elements $H \in \mathcal{F}$ garantiert.
*Beh.:* $H$ ist eine algebraische Basis von $X$.
*Beweis der Beh.:* $H \in \mathcal{F} \quad \Longrightarrow \quad H$ linear unabhängig.

Sei $x \in X$ mit $x \notin \text{span}H$.
$\implies \quad H \cup \{x\}$ linear unabhängig $\quad\implies\quad$ Widerspruch zur Maximalität von $H$. ∎

Man kann Hamel-Basen verwenden, um die Existenz unbeschränkter (d.h., unstetiger) linearer Funktionale $X \to \mathbf{C}$ auf einem BR $X$ zu beweisen; ÜA.
I.a. sind Hamel-Basen aber nur von geringem Nutzen. Dies liegt unter anderem an folgendem Resultat (ÜA):

**7.8. Satz.** *Sei $X$ ein BR und sei $H \subset X$ eine Hamel-Basis von $X$. Dann ist $H$ entweder endlich oder überabzählbar; m.a.W.: es gibt keine BRe mit abzählbarer Hamelbasis.*

**7.9. Bemerkung.** Viele, aber nicht alle, Banachräume $X$ besitzen eine *Schauderbasis.* Eine Familie $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ heißt eine Schauderbasis von $X$, wenn es zu jedem $x \in X$ *eindeutig bestimmte* Zahlen $\alpha_k \in \mathbf{C}$ gibt mit $x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$ (Konvergenz der Reihe in $(X, \|\cdot\|_X)$).
P. Enflo konstruierte 1972 einen separablen BR, der keine Schauderbasis besitzt.
Sei $X$ ein BR mit Schauderbasis. Dann gilt:
— $X$ separabel;
— alle Koordinatenfunktionen $x \mapsto \alpha_k(x)$ sind stetig.
— Die Normen der Projektionen $P_n$ auf $\text{span}\{x_1, \dots, x_k\}$, definiert durch

$$P_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) x_k,$$

sind durch eine feste Konstante beschränkt, d.h., es gibt ein $C > 0$ mit $\|P_n\| \le C$ für alle $n \in \mathbf{N}$.
— Orthonormalbasen im separablen Hilbertraum sind Schauderbasen.
— Die Familie $(e_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset \ell_1$ bildet eine Schauderbasis.

---

Wir kommen nun zum Satz von Hahn-Banach für Vektorräume (hier ist zunächst weder von einer Norm noch von einer Topologie die Rede!).

**7.10. Theorem.** (Hahn-Banach)
*Sei $X$ ein reeller VR, versehen mit einem Funktional*

$$p : X \to \mathbf{R},$$

*mit*

$$p(x+y) \le p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in X, \tag{7.1}$$

*und*

$$p(\alpha x) = \alpha p(x), \qquad \forall x \in X, \quad \forall \alpha \ge 0. \tag{7.2}$$

*Sei $Y \subset X$ ein $\mathbf{R}$-linearer TR von $X$ und*

$$f : Y \to \mathbf{R}$$

*ein* $\mathbf{R}$*-lineares Funktional auf* $Y$ *mit der Eigenschaft*

$$f(y) \leq p(y), \qquad \forall y \in Y. \tag{7.3}$$

*Dann gibt es ein* $\mathbf{R}$*-lineares Funktional* $F : X \to \mathbf{R}$ *mit*

$$F|_Y = f \tag{7.4}$$

*und*

$$F(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in X. \tag{7.5}$$

**Bemerkungen:**
$(a)$ Funktionale mit den Eigenschaften (7.1), (7.2) heißen *sub-linear*. Aus (7.1) folgt $p(-x) \geq -p(x)$, für alle $x \in X$.
$(b)$ Aus der Linearität von $F$ und Eqn. (7.5) folgt sofort

$$-p(-x) \leq F(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in X. \tag{7.5$'$}$$

$(c)$ Sinn und Zweck der Abschätzung durch $p$ wird später klar, etwa bei der Fortsetzung *stetiger* linearer Funktionale.

Der Beweis von Theorem 7.9 verwendet den folgenden einfachen Satz und das Lemma von Zorn.

**7.11. Proposition.** *Unter den Voraussetzungen von Theorem 7.9 sei* $x_0 \notin Y$ *und*

$$\tilde{Y} := \{y + \mu x_0\,;\ y \in Y,\ \mu \in \mathbf{R}\} = \mathrm{span}\,(Y \cup \{x_0\}).$$

*Dann besitzt* $f$ *eine Fortsetzung zu einem linearen Funktional*

$$\tilde{f} : \tilde{Y} \to \mathbf{R}$$

*mit*

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in \tilde{Y}.$$

**Beweis.** Wegen $x_0 \notin Y$ ist für jedes $x \in \tilde{Y}$ die Darstellung

$$x = y + \mu x_0$$

mit einem $y \in Y$ und einem $\mu \in \mathbf{R}$ eindeutig.
$\Longrightarrow$ Für jedes beliebige $c \in \mathbf{R}$ definiert

$$\Phi(x) = \Phi(y + \mu x_0) := f(y) + \mu c$$

ein lineares Funktional auf $\tilde{Y}$, das $f$ fortsetzt. Wir müssen aber $c$ so wählen, daß für alle $x \in \tilde{Y}$ die Abschätzung $\Phi(x) \leq p(x)$ gilt. Diese Bedingung ist äquivalent mit

$$f(y) + \mu c \leq p(y + \mu x_0), \qquad \forall y \in Y, \quad \mu \in \mathbf{R}. \tag{7.6}$$

Eqn. (7.6) $\iff$

$$\left.\begin{aligned} f(\frac{1}{\mu}y) + c &\leq p(x_0 + \frac{1}{\mu}y), \qquad \forall \mu > 0, \\ f(\frac{1}{-\mu}y) - c &\leq p(-x_0 + \frac{1}{-\mu}y), \qquad \forall \mu < 0, \end{aligned}\right\} \qquad \forall y \in Y; \tag{7.7}$$

die zweite Zeile von (7.7) erhält man, indem man (7.6) durch die positive Zahl $-\mu$ dividiert.
Um beide Bedingungen in (7.7) zu erfüllen, wählen wir $c$ so, daß

$$f(y') - p(y' - x_0) \leq c \leq p(y'' + x_0) - f(y''), \qquad \forall y', y'' \in Y. \tag{7.8}$$

*Frage:* Können wir beide Ungleichungen in (7.8) erfüllen?
*Beh.:* Ja! Denn für alle $y', y'' \in Y$ gilt:

$$\begin{aligned} f(y') + f(y'') = f(y' + y'') &\leq p(y' + y'') \\ &= p(y' - x_0 + y'' + x_0) \\ &\leq p(y' - x_0) + p(y'' + x_0); \end{aligned}$$

es folgt

$$\sup_{y' \in Y} \left[f(y') - p(y' - x_0)\right] \leq \inf_{y'' \in Y} \left[p(y'' + x_0) - f(y'')\right].$$

Wenn die Zahlen auf der RS und LS gleich sind gibt es genau ein $c$ mit der gewünschten Eigenschaft; sonst können wir $c$ beliebig zwischen diesen beiden Zahlen wählen. ∎

**Beweis von Theorem 7.10.** (Hahn-Banach)
Sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Fortsetzungen von $f$ auf TRe $U \supset Y$ von $X$, die einer Abschätzung durch das Funktional $p$ genügen, d.h., $\mathcal{F}$ ist die Menge aller (geordneten) Paare $(U, \varphi)$ mit:

— $Y \subset U \subset X$ linearer TR,
— $\varphi: U \to \mathbf{R}$ linear,
— $\varphi | Y = f$,
— $\varphi(x) \leq p(x)$, für alle $x \in U$.

Auf $\mathcal{F}$ definieren wir eine Halbordnung durch

$$(U, \varphi) \prec (V, \psi) \quad :\iff \quad U \subset V, \quad \psi | U = \varphi. \tag{7.9}$$

Damit wird $(\mathcal{F}, \prec)$ eine halbgeordnete Menge.

Sei $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ eine Kette. Definiere $\tilde{U}$ als die Vereinigung aller $U$, die bei den Paaren $(U, \varphi) \in \mathcal{K}$ vorkommen,

$$\tilde{U} := \{x \in X \,;\, \exists (U, \varphi) \in \mathcal{K} : x \in U\}.$$

Dann ist $\tilde{U}$ ein linearer TR von $X$ mit $\tilde{U} \supset Y$. Weil $\mathcal{K}$ eine Kette ist, können wir $f$ wegen der Konsistenzbedingung (7.9) auf $\tilde{U}$ fortsetzen zu einem

$$\tilde{\varphi} : \tilde{U} \to \mathbf{R}$$

mit

$$\tilde{\varphi}(x) \leq p(x), \quad \forall x \in \tilde{U}.$$

(Konstruktion von $\tilde{\varphi}$: Zu jedem $x \in \tilde{U}$ gibt es ein Paar $(U, \varphi) \in \mathcal{K}$ mit $x \in U$; definiere $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x)$. Die Wohldefiniertheit dieser Setzung folgt mit (7.9).)

$\Longrightarrow \quad (\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ ist eine obere Schranke der Kette $\mathcal{K}$.

Nach dem ZORNschen Lemma existiert ein maximales Element $(X_{\max}, f_{\max}) \in \mathcal{F}$.
Wäre $X_{\max} \neq X$, so gäbe es ein $x_0 \in X \setminus X_{\max}$, und nach Proposition 7.11 könnten wir dann $f_{\max}$ auf $\operatorname{span}(X_{\max} \cup \{x_0\})$ fortsetzen (inklusive Abschätzung durch $p(x)$). Dann wäre aber $(X_{\max}, f_{\max})$ *kein* maximales Element, Widerspruch! ∎

*Bemerkung:* In separablen BRen kann man den Satz von Hahn-Banach auch ohne ZORN beweisen; ÜA!

**7.12. Definition.** Sei $X$ ein VR über $\mathbf{C}$ (oder $\mathbf{R}$). Eine Abb. $p : X \to [0, \infty)$ heißt eine *Halbnorm*, wenn

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in X, \tag{7.10}$$

und

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x), \qquad \forall \alpha \in \mathbf{C}, \quad x \in X. \tag{7.11}$$

*Bem.:* Jede Norm ist zugleich auch Halbnorm; bei einer Halbnorm ist aber $p(x) = 0$ auch für $x \neq 0$ möglich. Jede Halbnorm auf einem $\mathbf{R}$-VR ist insbes. ein sublineares Funktional.

**7.13. Theorem.** (Hahn-Banach, komplexer Fall)
*Sei $X$ ein VR über $\mathbf{C}$ und $p$ eine Halbnorm auf $X$. Sei $Y$ ein $\mathbf{C}$-linearer Teilraum von $X$ und $f : Y \to \mathbf{C}$ ein $\mathbf{C}$-lineares Funktional mit*

$$|f(x)| \leq p(x), \qquad x \in Y. \tag{7.12}$$

*Dann gibt es ein $\mathbf{C}$-lin. Funktional $F : X \to \mathbf{C}$ mit*

$$F|_Y = f, \tag{7.13}$$

*und*

$$|F(x)| \leq p(x), \quad \forall x \in X. \tag{7.14}$$

**Beweis.** Ein **C**-VR ist zugleich auch ein **R**-VR, wenn wir die skalare Multiplikation auf **R** einschränken. Wir schreiben

$$f(x) = g(x) + \mathrm{i}h(x), \qquad x \in Y,$$

mit $g = \operatorname{Re} f$ und $h = \operatorname{Im} f$. Dann sind $g$ und $h$ **R**-lineare Funktionale auf $Y$ mit Werten in **R**. Weiter gilt

$$|g(x)| \le |f(x)| \le p(x), \quad |h(x)| \le |f(x)| \le p(x), \qquad \forall x \in Y.$$

Weiter ist für alle $x \in Y$ auch $\mathrm{i}x \in Y$ und es gilt

$$g(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}h(\mathrm{i}x) = f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}f(x) = \mathrm{i}(g(x) + \mathrm{i}h(x)) = -h(x) + \mathrm{i}g(x),$$

also

$$h(x) = -g(\mathrm{i}x), \qquad x \in Y; \tag{$*$}$$

insbesondere ist $h = \operatorname{Im} f$ durch $g = \operatorname{Re} f$ schon eindeutig bestimmt.[1)]
Nach Theorem 7.10 können wir $g$ zu einem **R**-linearen (reellen) Funktional $G$ auf $X$ fortsetzen mit

$$G(x) \le p(x), \qquad \forall x \in X.$$

$\Longrightarrow$

$$-G(x) = G(-x) \le p(-x) = p(x),$$

also

$$|G(x)| \le p(x), \qquad x \in X.$$

Wir definieren nun

$$F(x) := G(x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}x).$$

Dann ist

$$F(\mathrm{i}x) = G(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}G(-x) = G(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}G(x) = \mathrm{i}F(x),$$

und wir sehen, daß $F$ ein **C**-lineares Funktional ist. $F$ setzt $f$ auf $X$ fort, denn für $x \in Y$ gilt

$$F(x) = G(x) - \mathrm{i}G(\mathrm{i}x) = g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x) = g(x) + \mathrm{i}h(x) = f(x).$$

Schließlich zeigen wir noch $|F(x)| \le p(x)$, für alle $x \in X$: Schreibe dazu $F(x) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}$ (mit geeigneten $r \ge 0$ und $\vartheta \in \mathbf{R}$), so daß

$$|F(x)| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} F(x) = F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} x)$$

$\Longrightarrow$

$$|F(x)| = F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} x) = G(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} x) \le p(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} x) = p(x),$$

denn es ist $F(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} x)$ reell und $G$ der Realteil von $F$. ∎

---

1) Gleichung ($*$) ist quasi von allgemeinerem Interesse, weil man hier schön sehen kann, was die **C**-Linearität für den Real- und Imaginärteil eines linearen Funktionals bedeutet.

Wir betrachten jetzt *normierte* VRe.

**7.14. Korollar.**
*Sei $X$ ein normierter VR, $Y \subset X$ ein lin. TR und $f : Y \to \mathbf{C}$ ein* stetiges *lin. Funktional. Dann gibt es ein* stetiges *lin. Funktional $F : X \to \mathbf{C}$ mit $F|_Y = f$ und*

$$\|F\|_{X'} = \|f\|_{Y'} .$$

(Hierbei ist $\|f\|_{Y'} = \sup\{|f(y)| \,;\, y \in Y,\ \|y\| \leq 1\}$.)

**Beweis.** Setze

$$p(x) := \|f\|_{Y'} \, \|x\| , \qquad x \in X.$$

Dann ist $p$ eine (Halb-)Norm auf $X$ mit $|f(x)| \leq p(x)$, für alle $x \in Y$. Nach Theorem 7.13 gibt es eine lineare Forsetzung $F$ von $f$ auf ganz $X$ mit

$$|F(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in X.$$

$\Longrightarrow$

$$\|F\|_{X'} \leq \sup_{\|x\| \leq 1} p(x) = \|f\|_{Y'} .$$

Da andrerseits $F$ eine Fortsetzung von $f$ ist, gilt auch $\|F\| \geq \|f\|$, insgesamt also die behauptete Gleichheit. ∎

**7.15. Korollar.**
*Sei $X$ ein normierter VR und sei $0 \neq y \in X$. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\| = 1$ und*

$$\Lambda(y) = \|y\| .$$

**Beweis.** Sei $Y$ der von $y$ aufgespannte 1-dim. TR von $X$. Auf $Y$ definieren wir ein stetiges lineares Funktional $\lambda$ durch

$$\lambda(\alpha y) := \alpha \, \|y\| , \qquad \alpha \in \mathbf{C};$$

dann ist $\|\lambda\| = 1$.
Nach Korollar 7.14 gibt es eine stetige lineare Fortsetzung $\Lambda : X \to \mathbf{C}$ mit $\|\Lambda\| = \|\lambda\| = 1$. Insbesondere ist $\Lambda(y) = \lambda(y) = \|y\| = \|\Lambda\| \, \|y\|$. ∎

*Folgerungen:*
(a) $X'$ trennt die Punkte von $X$, d.h., zu $x \neq y \in X$ gibt es ein $\lambda \in X'$ mit $\lambda(x) \neq \lambda(y)$.
(b) Man nennt $\Lambda \in X'$ wie in Kor. 7.15 auch ein "tangentiales Funktional" zu $y \in X$. Funktionale mit den Eigenschaften aus Korollar 7.15 haben wir im Beweis zu Satz 3.21 (Isometrische Eigenschaft der Einbettung von $X$ in den Bidualraum $X''$) verwendet.

Dieser Satz wurde wiederum beim Beweis der Beschränktheit schwach konvergenter Folgen im BR verwendet (Kor. 4.6).

**7.16. Korollar.**
*Sei $X$ normierter VR, $M \subset X$ TR, und $y \in X$. Sei*

$$d := dist(y, M) = \inf_{m \in M} \|y - m\| .$$

*Dann gibt es ein $\Lambda \in X'$ mit $\|\Lambda\| \leq 1$,*

$$\Lambda(y) = d$$

*und*

$$\Lambda(m) = 0, \qquad \forall m \in M.$$

Beweis: ÜA.

*Frage:* Wie findet man im Hilbertraum lineare Funktionale mit den obigen Eigenschaften? (ÜA)

**7.17. Theorem.**
*Sei $X$ ein BR. Wenn der Dualraum $X'$ separabel ist, dann ist auch $X$ separabel.*

*Bem.:* Der Banachraum $\ell_1$ ist separabel, während $\ell_\infty$ nicht separabel ist. Wir wissen außerdem, daß $\ell_1' = \ell_\infty$ gilt und daß

$$\ell_1 \hookrightarrow \ell_\infty'$$

Wegen Theorem 7.17 kann hier aber *keine* Gleichheit gelten! Analoge Aussagen gelten für $L_1$, $L_1'$ und $L_\infty$, $L_\infty'$.

**Beweis.** Sei $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset X'$ eine in $X'$ dichte Folge (d.h., zu jedem $\lambda \in X'$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in N$ mit $\|\lambda - \lambda_n\|_{X'} < \varepsilon$).
Für jedes $n \in \mathbf{N}$ können wir ein $x_n \in X$ finden mit $\|x_n\| = 1$ und

$$|\lambda_n(x_n)| \geq \frac{1}{2} \|\lambda_n\|_{X'} .$$

Sei

$$\mathcal{D} := \left\{ x = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k x_k \; ; \; m \in \mathbf{N}, \; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{Q} + \mathrm{i}\mathbf{Q} \right\}$$

der rationale Span der $x_k$. $\mathcal{D}$ ist abzählbar und wir müssen nur noch zeigen, daß $\mathcal{D}$ dicht in $X$ liegt.
Angenommen, $\mathcal{D}$ *nicht* dicht. Dann gibt es ein $y \in X$ mit $d := \mathrm{dist}\,(y, \mathcal{D}) > 0$.

Nach Korollar 7.15 können wir ein $\Lambda \in X'$ finden mit $\Lambda(y) \neq 0$, aber $\Lambda(x) = 0$ für alle $x \in \mathcal{D}$.
Wegen $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dicht in $X'$ gibt es eine Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k\in\mathbf{N}} \subset (\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit

$$\lambda_{n_k} \to \Lambda \quad \text{in } X', \qquad k \to \infty.$$

Wir schätzen nun ab

$$\|\Lambda - \lambda_{n_k}\|_{X'} \geq |(\Lambda - \lambda_{n_k})(x_{n_k})| = |\lambda_{n_k}(x_{n_k})| \geq \frac{1}{2}\|\lambda_{n_k}\|_{X'}.$$

$\Longrightarrow \quad \|\lambda_{n_k}\|_{X'} \to 0$, mit $k \to \infty$;
$\Longrightarrow \quad \Lambda = 0$, im Widerspruch zu $\Lambda(y) \neq 0$. ∎

Wir wollen nun aus dem Satz von Hahn-Banach einen Trennungssatz für konvexe Mengen herleiten.

**7.18. Definition.** Sei $X$ ein VR. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *konvex*, wenn mit $x, y \in M$ stets auch

$$tx + (1-t)y \in M, \qquad t \in [0,1],$$

gilt.

**7.19. Definition.** Sei $X$ ein normierter VR und sei $M \subset X$ offen und konvex mit $0 \in M$. Die Abb. $p_M : X \to [0,\infty)$, definiert durch

$$p_M(x) := \inf\{\alpha > 0\,;\, x \in \alpha M\} \tag{7.15}$$

heißt das *Minkowski-Funktional* der Menge $M$.

**7.20. Lemma.**
*Seien $M$ und $p_M$ wie in Def. 7.19. Dann hat $p_M$ die Eigenschaften (7.1), (7.2) (subadditiv und positiv homogen). Weiter gilt*

$$M = \{x \in X\,;\, p_M(x) < 1\}.$$

**Beweis.** $p_M$ positiv homogen ist klar nach Definition von $p_M$.
Für $x, y \in X$ und $\alpha, \beta > 0$ mit $x \in \alpha M$, $y \in \beta M$, folgt

$$\frac{1}{\alpha+\beta}(x+y) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\alpha}x\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{1}{\beta}y\right) \in M,$$

da $M$ konvex, $\alpha^{-1}x \in M$, $\beta^{-1}y \in M$, und

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} = 1.$$

$\Longrightarrow \quad p_M(x+y) \leq \alpha + \beta.$
Für jedes $\varepsilon > 0$ können wir $\alpha < p_M(x) + \varepsilon$ und $\beta < p_M(y) + \varepsilon$ wählen. $\quad \Longrightarrow$

$$p_M(x+y) \leq p_M(x) + p_M(y) + 2\varepsilon, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Wir zeigen noch

$$M = \{x \in X \,;\, p_M(x) < 1\}.$$

Sei $x \in X$ mit $p_M(x) < 1$. Dann existiert ein $\alpha < 1$ mit $x \in \alpha M$, mithin gilt

$$x = (1-\alpha)0 + \alpha(\frac{1}{\alpha}x) \in M,$$

da $M$ konvex, $0 \in M$ und $\frac{1}{\alpha}x \in M$.
Ist umgekehrt $x \in M$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(1+\varepsilon)x \in M$, da $M$ offen. $\Longrightarrow$

$$p_M(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

∎

Einführung zu Theorem 7.21: Wie trennt man disjunkte konvexe (beschränkte) Mengen im Hilbertraum?

**7.21. Theorem.**
*Sei $X$ ein normierter VR, $A, B \subset X$ seien konvex mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt:*
*(a) Ist $B$ offen, so gibt es ein lineares Funktional $\lambda \in X'$ und ein $a \in \mathbf{R}$ mit*

$$Re\,\lambda(x) \leq a < Re\,\lambda(y), \qquad \forall x \in A,\ y \in B.$$

*(b) Ist $A$ abgeschlossen und $B = \{x_0\}$ einpunktig, so existieren ein $\lambda \in X'$ und ein $b \in \mathbf{R}$ mit*

$$Re\,\lambda(x) < b < Re\,\lambda(x_0), \qquad \forall x \in A.$$

Im folgenden Beweis betrachten wir nur den Fall reeller VRe. (Ein reelles trennendes Funktional $\tilde{\lambda}$ in einem $\mathbf{C}$-VR kann man ja immer zu einem $\mathbf{C}$-linearen Funktional fortsetzen.)

**Beweis.**
(1) Konstruktion eines sublinearen Funktionals $p$ auf $X$:
Die Menge

$$V := B - A = \{y - x \,;\, y \in B, x \in A\}$$

ist konvex und offen; außerdem gilt $0 \notin V$.
($V$ offen ist klar; $0 \notin V$ wegen $A \cap B = \emptyset$; $V$ konvex rechnet man sofort nach.)
Sei nun $x_1 \in V$ beliebig und

$$U := x_1 - V.$$

Dann ist $U$ eine offene, konvexe Nullumgebung in $X$. Sei $p_U : X \to \mathbf{R}$ das Minkowskifunktional von $U$.
Wegen $0 \notin V$ ist $x_1 \notin U$, also $p_U(x_1) \geq 1$.

(2) Konstruktion eines geeigneten Teilraums $Y$ und eines linearen Funktionals $f: Y \to \mathbf{R}$:
Wir definieren ein lineares Funktional $f$ auf $Y := \operatorname{span}\{x_1\}$ durch

$$f(\alpha x_1) := \alpha, \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

$\implies$

$$f(\alpha x_1) = \alpha \le \alpha p_U(x_1) = p_U(\alpha x_1), \qquad \alpha \ge 0,$$

und

$$f(\alpha x_1) = \alpha < 0 \le p_U(\alpha x_1), \qquad \alpha < 0.$$

(3) Anwendung des Satzes von Hahn-Banach:
Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein lineares Funktional $F : X \to \mathbf{R}$ mit

$$F|_Y = f, \qquad \text{und } F \le p_U.$$

Das Funktional $F$ ist dann stetig (da $U$ Nullumgebung): Aus

$$-F(x) = F(-x) \le p_U(-x)$$

folgt

$$-p_U(-x) \le F(x) \le p_U(x), \qquad x \in X,$$

also

$$|F(x)| \le 1, \qquad \forall x \in U \cap (-U).$$

Da $U$ Nullumgebung, gibt es eine Kugel $B_\varrho(0) \subset U$, also auch $B_\varrho(0) \subset U \cap (-U)$. Es folgt

$$\|x\| \le \varrho \quad \implies \quad |F(x)| \le 1.$$

Also ist $\|F\| \le \varrho^{-1}$, d.h., $F$ ist linear und stetig. —
(4) Nachprüfen der Trennungseigenschaft:
Seien nun $x \in A$ und $y \in B$. Dann ist $x - y + x_1 \in U$, und es gilt

$$F(x) - F(y) + 1 = F(x - y + x_1) \le p_U(x - y + x_1) < 1,$$

also $F(x) < F(y)$.
$\implies$

$$\sup_{x \in A} F(x) \le \inf_{y \in B} F(y).$$

$\implies \quad \exists \mu_0 \in \mathbf{R}$:

$$\sup_{x \in A} F(x) \le \mu_0 \le \inf_{y \in B} F(y).$$

Wegen $B$ offen ist $\{F(y)\ ;\ y \in B\} \subset \mathbf{R}$ offen, denn jedes stetige lineare (reellwertige) Funktional, das nicht das Nullfunktional ist, ist eine offene Abbildung von $X$ nach $\mathbf{R}$ (was man direkt zeigen kann oder auch mit dem Satz von der offenen Abbildung). Daher gilt $\mu_0 < F(y)$, für alle $y \in B$, was den Beweis von (a) beendet.

*Beweis von (b):* Sei $W$ eine offene, konvexe Nullumgebung in $X$ mit

$$(x_0 + W) \cap A = \emptyset.$$

(Wegen $A = \overline{A}$ ist $\mathcal{O} := X \setminus A$ offen und $x_0 \in \mathcal{O}$. Daher gibt es ein $\varrho > 0$ mit $x_0 \in x_0 + B_\varrho(0) \subset \mathcal{O}$.)
Nach Teil (a) gibt es dann ein $\lambda \in X'$ und ein $a \in \mathbf{R}$ mit

$$\operatorname{Re} \lambda(x) \leq a < \operatorname{Re} \lambda(y), \qquad x \in A, \quad y \in x_0 + W.$$

Diese Abschätzung gilt dann insbesondere für $y = x_0$. Wähle nun $b \in (a, \operatorname{Re} \lambda(x_0))$ beliebig. ∎

*Bemerkung.* Diverse Varianten, z.B.: $A$ kompakt, $B$ abgeschlossen, dann Trennung mit $\operatorname{Re} \lambda(x) < a < \operatorname{Re} \lambda(x_0)$, $\forall x \in A, y \in B$. vgl. [RS].

Eine Anwendung auf die konvexe Hülle einer Menge.

**7.22. Definition.** Sei $X$ ein normierter VR und sei $A \subset X$ eine Teilmenge. Die *Polare* $A^\circ$ von $A$ wird definiert durch

$$A^\circ := \{\lambda \in X' \,;\, |\lambda(x)| \leq 1, \, \forall x \in A\}.$$

Entsprechend definiert man für $B \subset X'$ die *Linkspolare* durch

$$^\circ B := \{x \in X \,;\, |\varphi(x)| \leq 1, \, \forall \varphi \in B\}.$$

Für $A \subset X$ heißt $^\circ A^\circ := {}^\circ(A^\circ)$ die *Bipolare* von $A$.

*Bemerkung.* Ist $M$ ein linearer Teilraum, so gilt

$$M^\circ = M^\perp := \{\lambda \in X' \,;\, \lambda(x) = 0, \, \forall x \in M\};$$

für $x \in M$ und $\lambda \in M^\circ$ ist nämlich

$$n|\lambda(x)| = |\lambda(nx)| \leq 1, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Analog gilt für einen linearen Teilraum $N \subset X'$

$$^\circ N = {}^\perp N = \{x \in X \,;\, \varphi(x) = 0, \, \forall \varphi \in N\}.$$

$M^\perp$ und $^\perp N$ heißen auch *Annulatoren* (engl.: annihilator); sie bilden einen Ersatz für das Orthogonalkomplement eines VRs im Hilbertraum. Für einen lin. TR $M \subset X$ gilt wieder $^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.

**7.23. Definition.** Sei $X$ ein VR. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *ausgeglichen* (balanced, équilibré, kreisförmig), wenn mit $x \in A$ auch $\zeta x \in A$ ist für alle $\zeta \in \mathbf{C}$ mit $|\zeta| = 1$.

— Manche Autoren verwenden $|\zeta| \leq 1$ in der Definition des Begriffs "ausgeglichen". Da man es aber fast immer mit Mengen zu tun hat, die zugleich konvex sind, macht das i.a. keinen Unterschied.
— $\emptyset \neq A$ konvex und ausgeglichen $\quad\Longrightarrow\quad 0 \in A$.
— Offenbar sind polare Mengen stets abgeschlossen, konvex und ausgeglichen.

**7.24. Definition.** Sei $X$ normierter VR, $A \subset X$. Die kleinste konvexe und ausgeglichene Menge, die $A$ enthält, heißt die *absolutkonvexe Hülle* von $A$; in Zeichen: a.c.h.$(A)$.
— a.c.h.$(A)$ umfaßt trivialerweise die *konvexe Hülle von $A$*, definiert durch

$$\mathrm{conv}(A) := \{tx + (1-t)y \,;\, x, y \in A,\ 0 \leq t \leq 1\}.$$

Dabei kann aber a.c.h.$(A)$ "viel größer" sein als $\mathrm{conv}(A)$!

**7.25. Theorem.** (Der Bipolarensatz.)
*Sei $X$ ein normierter VR und $\emptyset \neq A \subset X$. Dann gilt*

$$^\circ A^\circ = \overline{\text{a.c.h.}(A)};$$

*d.h., die Bipolare von $A$ ist gleich dem Abschluß der absolutkonvexen Hülle von $A$.*

Interpretation: Links steht ein durch die Analysis (durch Ungleichungen) definierter Ausdruck, auf der rechten Seite steht ein durch geometrische Begriffe definierter Ausdruck (bis auf die Abschließung).

**Beweis.** Sei $B := \overline{\text{a.c.h.}(A)}$.
(1) Ist $x \in A$ und $\lambda \in A^\circ$, so gilt $|\lambda(x)| \leq 1$, und es folgt

$$x \in {}^\circ A^\circ,$$

und wir sehen, daß jedenfalls $A \subset {}^\circ A^\circ$ gilt. Da $^\circ A^\circ$ als Polare abgeschlossen, konvex und ausgeglichen ist, folgt damit sofort

$$B = \overline{\text{a.c.h.}(A)} \subset {}^\circ A^\circ. \tag{$*$}$$

(2) Aus $A \subset B$ folgt $B^\circ \subset A^\circ$ und $^\circ A^\circ \subset {}^\circ B^\circ$, also, mit $(*)$,

$$B \subset {}^\circ A^\circ \subset {}^\circ B^\circ,$$

und wir müssen nur noch $^\circ B^\circ \subset B$ zeigen.
(3) Sei $x_0 \in X \setminus B$. Nach dem Trennungssatz 7.21, (b), exist. $\lambda \in X'$ und $a \in \mathbf{R}$ mit

$$|\lambda(y)| \leq a < |\lambda(x_0)|, \qquad \forall y \in B. \tag{$**$}$$

(Man beachte, daß $B$ konvex und ausgeglichen ist, sodaß mit $y \in B$ auch $e^{i\vartheta}y \in B$ ist für alle $\vartheta \in \mathbf{R}$; wir können $\vartheta \in \mathbf{R}$ so wählen, daß $\lambda(e^{i\vartheta}y)$ reell ist.)
Es ist $a \geq 0$, wegen $(**)$ dürfen wir aber sogar $a > 0$ annehmen. Schließlich können wir $\lambda$ so skalieren, daß $a = 1$ ist; damit folgt $\lambda \in B^\circ$ und $x_0 \notin {}^\circ B^\circ$. ∎