¶6. Distributionen.

Für $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ offen ist

$$C_c^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega)\,;\, \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega,\ \operatorname{supp}\varphi \text{ kompakt}\}.$$

Für kompaktes $K \subset \Omega$ sei

$$C_c^\infty(K) := \{\varphi \in C^\infty(\Omega)\,;\, \operatorname{supp}\varphi \subset K\}.$$

Offenbar gilt $C_c^\infty(K) \neq \{0\} \iff K^\circ \neq \emptyset$.
Auf $C_c^\infty(K)$ definieren wir die abzählbare Familie von Halbnormen

$$p_{\alpha,\infty;K}(\varphi) := \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)| = \sup_{x\in\mathbf{R}^m} |D^\alpha\varphi(x)|, \qquad \varphi \in C_c^\infty(K),$$

$\alpha \in \mathbf{N}_0^m$. Jeder der Räume $C_c^\infty(K)$ ist ein Fréchet-Raum (ÜA). Man beachte aber, daß $C_c^\infty(\Omega)$, versehen mit der Familie der Halbnormen $p_{\alpha,\infty;K}$, mit $K \subset \Omega$ kompakt und $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$, *nicht* vollständig ist. (Beispiel als ÜA).
Wir betrachten nun eine *Ausschöpfung von Ω durch Kompakta K_n*: Seien dazu $\Omega_n \subset \Omega$ offen mit $K_n := \overline{\Omega}_n$ kompakt und $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ so, daß

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \qquad \cup_{n=1}^\infty \Omega_n = \Omega.$$

Insbesondere gilt dann

$$C_c^\infty(\Omega) = \cup_{n=1}^\infty C_c^\infty(K_n).$$

Bemerkungen:
(a) Für feinere Untersuchungen fordert man von solchen Ausschöpfungen auch gerne noch $(\overline{\Omega}_n)^\circ = \Omega_n$.
(b) Wegen des Baireschen Kategorie-Satzes reicht es vermutlich, eine Ausschöpfung von Ω durch Kompakta K_n zu Grunde zu legen mit $K_n \subset \Omega$ kompakt, $K_n \subset K_{n+1}$ und $\cup K_n = \Omega$ (ohne die Information über die Ω_n zu verlangen).

Wir versehen nun $C_c^\infty(\Omega)$ mit der Topologie eines *induktiven Limes:*

6.1. Theorem. *Sei X ein komplexer (oder reeller) VR. Sei $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Teilräumen mit $X_n \subset X_{n+1}$ und $\cup X_n = X$.*
Jeder TR X_n sei mit einer lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}_n$ versehen mit

$$\mathcal{T}_{n+1}|_{X_n} = \mathcal{T}_n.$$

Sei $\mathcal{U}$ die Menge aller kreisförmigen, absorbierenden, konvexen Teilmengen $U \subset X$, die die Eigenschaft besitzen, daß $U \cap X_n$ offen ist in X_n, d.h., $U \cap X_n \in \mathcal{T}_n$, für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann gilt:

(a) *$\mathcal{U}$ ist Nullumgebungsbasis einer lokalkonvexen Topologie $\mathcal{T}$ auf X.*

(*b*) *$\mathcal{T}$ ist die stärkste (= feinste) lokalkonvexe Topologie auf X, für die die Einbettungen $X_n \hookrightarrow X$ stetig sind für alle $n \in \mathbf{N}$.*

(*c*) *$\mathcal{T}|X_n = \mathcal{T}_n, \qquad \forall n \in \mathbf{N}$.*

(*d*) *Wenn alle $(X_n, \mathcal{T}_n)$ vollständig sind, dann ist auch $(X, \mathcal{T})$ vollständig.*

Beweis. (a)—(c): [RS-I; p. 146f]. (d): [RoRo; p. 128] ∎

Bemerkung. $(X, \mathcal{T})$ nennt man den *strikten induktiven Limes* der Räume $(X_n, \mathcal{T}_n)$.

6.2. Theorem. *Sei X der strikte induktive Limes der lokalkonvexen Räume X_n, $n \in \mathbf{N}$. Sei Y ein lokalkonvexer Raum. Dann gilt:*
Eine lineare Abbildung

$$T: X \to Y$$

ist genau dann stetig, wenn jede Einschränkung $T|X_n: X_n \to Y$ stetig ist.

Beweis.
"$\Rightarrow$": trivial.
"$\Leftarrow$": Sei N eine kreisförmige, konvexe, offene Nullumgebung in Y. Da $T|X_n$ stetig, ist jede der Mengen

$$U_n := T^{-1}[N] \cap X_n = \{x \in X_n \, ; \, Tx \in N\} = (T|X_n)^{-1}[N]$$

offen in X_n.
U_n offen in X_n und $0 \in U_n \quad \Longrightarrow \quad U_n$ absorbiert jedes $x \in X_n \quad \Longrightarrow \quad T^{-1}[N]$ absorbierend.
N konvex und kreisf. $\quad \Longrightarrow \quad T^{-1}[N]$ kvx. und kreisf.
Insgesamt folgt $T^{-1}[N]$ offen in X, also T stetig. ∎

6.3. Notation. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ offen, sei $(K_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω durch Kompakta. Man bezeichnet $C_c^\infty(\Omega)$, versehen mit der Topologie des strikten induktiven Limes bezügl.

$$C_c^\infty(\Omega) = \cup C_c^\infty(K_n),$$

mit $\mathcal{D}(\Omega)$, dem *Raum der Testfunktionen.*

Bemerkung: Die Topologie des induktiven Limes auf $C_c^\infty(\Omega)$ ist unabhängig von der Wahl der Kompakta K_n.

Bem.: Auch den Raum $\mathcal{O}^m$ und den Raum der langsam anwachsenden Folgen $\mathbf{s}'$ kann man mit einer Topologie des induktiven Limes ausrüsten.

Der folgende Satz über die Konvergenz in der Topologie eines induktiven Limes ist für die Distributionstheorie besonders wichtig:

6.4. Theorem. *Sei $X = \cup X_n$ mit der Topologie des strikten induktiven Limes der lokalkonvexen Räume X_n. Weiter sei jedes X_n ein echter, abgeschlossener Teilraum von X_{n+1}. Dann gilt:*

Eine **Folge** $(f_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ *konvergiert gegen* $f \in X$ *genau dann, wenn es ein* $n \in \mathbf{N}$ *gibt mit*

$$(f_k) \subset X_n, \qquad f \in X_n, \qquad f_k \to f \text{ in } X_n.$$

Bem.: Die Aussage gilt nur für Folgen, nicht für Netze!

Beweis.
"$\Leftarrow$": trivial.
"$\Rightarrow$": Sei $(f_k) \subset X$ mit $f_k \to f \in X$, $k \to \infty$.
Annahme: $\forall n \in \mathbf{N}\, \exists k_n \colon f_{k_n} \notin X_n$.
(1) Dann können wir Teilfolgen $(g_i) \subset (f_k)$ und $(Y_i) \subset (X_n)$ finden mit

$$g_i \in Y_{i+1} \setminus Y_i.$$

Für jedes $i \in \mathbf{N}$ gibt es ein stetiges lineares Funktional $\ell_i \in X^*$ mit

$$\ell_i(g_i) > 0, \qquad \ell_i|_{Y_i} = 0.$$

(Dies kann man zB mit Hilfe des Trennungssatzes sehen: Es ist X lokalkonvex und Y_i ist abgeschlossene, kvxe Teilmenge von X; zugleich ist $\{g_i\}$ eine *kompakte* kvxe Teilmenge von X mit $\{g_i\} \cap Y_i = \emptyset$. Daher können wir den Satz über die Trennung kvxer Mengen durch Hyperebenen anwenden (Th. 2.24, (c)). Es gibt also ein reell-wertiges Funktional $\ell_i \in X^*$ mit

$$\ell_i(g_i) > \sup_{y\in Y_i} \ell_i(y).$$

Wegen Y_i linearer Raum muß dann $\ell_i(y) = 0$ sein für alle $y \in Y_i$.)
(2) Daher können wir induktiv Zahlen $\gamma_i \in \mathbf{R}$ so finden, daß die Funktionale $\tilde{\ell}_i := \gamma_i \ell_i$ die Eigenschaft

$$\tilde{\ell}_n(g_n) = n - \sum_{k=1}^{n-1} \tilde{\ell}_k(g_n), \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{$*$}$$

besitzen. (Man kann bei diesem Schritt ohne Einschränkung sicherstellen, daß die rechte Seite von $(*)$ nicht Null ist.)
Sei $\tilde{\ell} := \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\ell}_k$. Auf jedem der X_n ist die Summe für $\tilde{\ell}$ *endlich,* mithin ist $\tilde{\ell}|X_n$ ein stetiges lineares Funktional auf X_n. Mit Thm. 6.2 folgt $\tilde{\ell} \colon X \to \mathbf{R}$ stetig.
(3) Aus $g_i \to f$ und $\tilde{\ell} \in X^*$ folgt $\tilde{\ell}(g_i) \to \tilde{\ell}(f)$, $i \to \infty$.
Andrerseits ist aber, nach Konstruktion, $\tilde{\ell}(g_i) = i$ für alle $i \in \mathbf{N}$, da

$$\begin{aligned}\tilde{\ell}(g_i) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\ell}_k(g_i) &= \tilde{\ell}_i(g_i) + \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{\ell}_k(g_i) \\ &=_{(*)} i - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{\ell}_k(g_i) + \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{\ell}_k(g_i) = i.\end{aligned}$$

Also gilt $\tilde{\ell}(g_i) \to \infty$, mit $i \to \infty$, Widerspruch!

Also gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ mit $f_k \in X_n$ für alle $k \in \mathbf{N}$. Aus $f_k \to f \in X$ und X_n abgeschlossen folgt nun $f \in X_n$. ∎

Bem.: Im obigen Beweis ist es evtl. sogar einfacher, direkt mit dem Satz von Hahn-Banach zu arbeiten, statt den Trennungssatz für konvexe Teilmengen zu verwenden. Dazu verschafft man sich zunächst auf dem Unterraum $\operatorname{span}(Y_i \cup \{g_i\})$ ein (stetiges) lineares Funktional λ_i mit $\lambda_i(g_i) = 1$, das auf Y_i verschwindet. Das Funktional λ_i besitzt nach Hahn-Banach eine stetige Fortsetzung auf ganz X.

6.5. Korollar. *Eine Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ konvergiert genau dann gegen 0, wenn es ein Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt mit*

$$\operatorname{supp} \varphi_n \subset K, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

und

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_n(x)| \to 0, \qquad n \to \infty,$$

für alle $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$.

6.6. Definition. Die stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{D}(\Omega)$ heißen *Distributionen* oder *verallgemeinerte Funktionen.*
Notation: $\mathcal{D}'(\Omega)$; $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$, $\mathcal{D}' := \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$.
Es gilt $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$.

6.7. Korollar (zu Thm. 6.2)
Ein lineares Funktional $T \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ ist genau dann stetig, wenn es zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega$ eine Konstante $C > 0$ und ein $j \in \mathbf{N}$ gibt mit

$$|T(\varphi)| \le C \sum_{|\alpha| \le j} \|D^\alpha \varphi\|_\infty ,$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset K$.

6.8. Korollar. *Ein lineares Funktional $T \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ ist genau dann stetig, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:*
Wenn es zu einer Folge $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ ein Kompaktum $K \subset \Omega$ gibt mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subset K$ für alle $n \in \mathbf{N}$, und wenn $\|D^\alpha \varphi_n\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$ gilt für alle $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$, so folgt $T(\varphi_n) \to 0$.

Bemerkung: Dieses Stetigkeitskriterium wird in der "naiven" Distributionstheorie als **Definition** benützt!

Beweis.
"$\Rightarrow$": Die Bedingung an die φ_n in Korollar 6.8 garantiert, daß $\varphi_n \to 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. T stetig $\Longrightarrow \quad T(\varphi_n) \to 0$.
"$\Leftarrow$": Für jedes Kompaktum $K \subset \Omega$ ist $C_c^\infty(K)$ ein Fréchet-Raum. Wegen der angegebenen Bedingung ist T auf jedem $C_c^\infty(K)$ folgenstetig, also stetig. Nach Thm. 6.2 ist daher $T \colon \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{C}$ stetig. ∎

6.9. Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ offen und $f \in C(\Omega)$. Dann definiert man für $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ die Distribution $D^\alpha f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$(D^\alpha f)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) D^\alpha \varphi(x) \mathrm{d}x, \qquad \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Für kompaktes $K \subset \Omega$ gilt nämlich

$$|(D^\alpha f)(\varphi)| \leq \left(\sup_{x \in K} |f(x)| \right) \|D^\alpha \varphi\|_\infty \cdot \mathrm{vol}(K) = C_K \cdot p_{\alpha,\infty;K}(\varphi), \qquad \varphi \in C_c^\infty(K),$$

mit einer Konstanten C_K, die nur von K abhängt.

6.10. Beispiel. Auf $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ sei $\delta_a^{(n)}$ für $a \in \mathbf{R}$ und $n \in \mathbf{N}_0$ definiert durch

$$\delta_a^{(n)}(\varphi) := (-1)^n \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \varphi \right](a).$$

Dann gilt

$$T := \sum_{n=0}^\infty \delta_n^{(n)} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}),$$

aber $T \notin \mathcal{S}'(\mathbf{R})$.

Bemerkungen. Reflexivität von $\mathcal{D}$; Tonneliertheit; Montel-Eigenschaft.