¶6. Hilberträume.

1. Grundbegriffe.

Ein *Prä-Hilbertraum* ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem inneren Produkt (=Skalarprodukt, positive Form). Wir beginnen daher mit (Sesquilinear-) Formen.

6.1. Definition. Sei $\mathcal{E}$ ein komplexer VR. Eine Abb.

$$\mathbf{s} : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{C}$$

heißt *Sesquilinearform auf* $\mathcal{E}$ (oder kurz: *Form*), wenn $\mathbf{s}[.,.]$ linear im 1. Argument und konjugiert linear im 2. Argument ist. Zu einer Sesquilinearform $\mathbf{s}$ gehört die *quadratische Form*

$$\mathbf{s}[f] := \mathbf{s}[f,f], \qquad \forall f \in \mathcal{E}.$$

Bem.: Reelle VRe und Bilinearformen.

6.2. Bemerkung. Im komplexen VR $\mathcal{E}$ gilt für jede Form $\mathbf{s}$ die *Polarisierungsidentität*

$$4\,\mathbf{s}[f,g] = \mathbf{s}[f+g] + \mathrm{i}\mathbf{s}[f+\mathrm{i}g] - \mathbf{s}[f-g] - \mathrm{i}\mathbf{s}[f-\mathrm{i}g], \quad \forall f,g \in \mathcal{E}, \tag{6.1}$$

oder: $4\,\mathbf{s}[f,g] = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\,\mathbf{s}[f+\mathrm{i}^k g]$. Daher kann man im komplexen Fall aus der quadratischen Form die volle Sesquilinearform rekonstruieren. Dies ist bei reellen VRen i.a. nicht möglich! (Bspl. in den Übungen.)

6.3. Beispiele. Sei $I = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes, beschränktes Intervall, und sei $k \in \mathbb{N}_0$. Wir definieren

$$C^k([a,b]) := \{u \in C^k(I)\,;\, u^{(j)} \text{ stetig auf } [a,b] \text{ fortsetzbar}, 0 \le j \le k\}.$$

Mit einem festen $w \in C([a,b])$ definieren wir die Sesquilinearformen

$$\mathbf{s}_k : C^k([a,b]) \times C^k([a,b]) \to \mathbb{C}$$

durch

$$\mathbf{s}_k[f,g] := \int_a^b f^{(k)}(x)\overline{g^{(k)}(x)}\,w(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f,g \in C^k([a,b]). \tag{6.2}$$

6.4. Definition. Eine Form $\mathbf{s}$ heißt *symmetrisch*, wenn

$$\mathbf{s}[f,g] = \overline{\mathbf{s}[g,f]}, \qquad \forall f,g \in \mathcal{E},$$

gilt. Eine Form $\mathbf{s}$ heißt *nicht-negativ*, wenn

$$\mathbf{s}[f] \ge 0, \qquad \forall f \in \mathcal{E},$$

gilt, und *positiv*, falls

$$\mathbf{s}[f] > 0, \qquad \forall 0 \neq f \in \mathcal{E}.$$

Bemerkungen.
(a) Eine Form $\mathbf{s}$ im komplexen VR $\mathcal{E}$ ist genau dann symmetrisch, wenn die zugehörige quadratische Form reellwertig ist. (ÜA)
(b) Die Formen $\mathbf{s}_k$ in Bspl. 6.3 sind genau dann symmetrisch, wenn die Gewichtsfunktion w reellwertig ist.

6.5. Definition. Eine positive Form $\mathbf{s}$ auf dem komplexen VR $\mathcal{E}$ heißt *Skalarprodukt*. Man schreibt dann gerne

$$\langle f\,,\,g\rangle := \mathbf{s}[f,g], \qquad \|f\| := \langle f\,,\,f\rangle^{1/2}, \qquad f,g \in \mathcal{E}.$$

6.6. Satz. Für Skalarprodukte gilt die *Schwarzsche Ungleichung*

$$|\,\langle f\,,\,g\rangle\,| \leq \|f\|\,\|g\|\,, \qquad f,g \in \mathcal{E}. \tag{6.3}$$

Gleichheit gilt in (6.3) genau dann, wenn f und g linear abhängig sind.

1. Beweis. Folgt sofort aus der Identität

$$\|g\|^2\left(\|f\|^2\,\|g\|^2 - |\,\langle f\,,\,g\rangle\,|^2\right) = \left\|\,\|g\|^2 f - \langle f\,,\,g\rangle\, g\right\|^2 \geq 0,$$

die man durch Ausrechnen bestätigt. (ÜA)
Man sieht leicht, daß auch der Zusatz richtig ist. ∎

2. Beweis. Definiere $\varphi(t) := \|f + tg\|^2$, $t \in \mathbb{R}$, also $\varphi(t) \geq 0$, für alle $t \in \mathbb{R}$, und

$$\varphi(t) = \|f\|^2 + 2t\mathrm{Re}\,\langle f\,,\,g\rangle + t^2\,\|g\|^2\,.$$

M.a.W., φ ist ein nicht-negatives Polynom zweiten Grades; insbesondere besitzt φ entweder gar keine reellen Nullstellen oder aber eine doppelte reelle Nullstelle.
$\Longrightarrow$ Diskriminante ≤ 0

$$\Longrightarrow \qquad 4(\mathrm{Re}\,\langle f\,,\,g\rangle)^2 - 4\,\|f\|^2\,\|g\|^2 \leq 0.$$

$$\Longrightarrow |\mathrm{Re}\,\langle f\,,\,g\rangle\,| \leq \|f\|\,\|g\|\,.$$

Es gibt ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $\left\langle e^{i\vartheta} f\,,\,g\right\rangle = |\,\langle f\,,\,g\rangle\,|$, etc.
Beweis des Zusatzes ist hier etwas mühsamer; vgl. [W] ∎

Bemerkung. Die Schwarzsche Ungleichung (6.3) gilt allgemeiner für Sesquilinearformen $\mathbf{s} \geq 0$ (allerdings ohne den Zusatz!):

$$|\mathbf{s}[f,g]| \leq \mathbf{s}[f]^{1/2}\mathbf{s}[g]^{1/2}, \qquad \forall f,g \in \mathcal{E}.$$

Bem.: Für $0 \le a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$ab \le \frac{1}{2}(a^2 + b^2),$$

bzw.

$$\forall \varepsilon > 0 : \quad ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2.$$

Damit folgt aus (6.3) die "Cauchy-Young"sche Ungleichung

$$\forall \varepsilon > 0 : \, |\langle f\,,\, g\rangle| \le \frac{\varepsilon}{2} \|f\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|g\|^2 . \tag{6.4}$$

6.7. Definition. Sei $\mathcal{E}$ ein komplexer VR und $\langle .\,,\, .\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{E}$. Dann heißt $(\mathcal{E}, \langle .\,,\, .\rangle)$ ein *Prä-Hilbertraum.*

Wenn wir wieder

$$\|f\| = \langle f\,,\, f\rangle^{1/2}, \qquad f \in \mathcal{E},$$

wie in Definition 1.5 definieren, rechnet man leicht nach, daß $\|.\|$ eine *Norm* ist. Jeder Prä-Hilbertraum ist damit zugleich ein normierter VR und die topologischen Grundbegriffe leiten sich aus der zugehörigen Metrik ab.

6.8. Satz. (Die Parallelogrammgleichung) *Im Prä-Hilbertraum* $(\mathcal{E}, \langle .\,,\, .\rangle)$ *gilt*

$$2 \left(\|f\|^2 + \|g\|^2 \right) = \|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 , \qquad f, g \in \mathcal{E}. \tag{6.6}$$

Bild!!! Beweis: Rechte Seite ausrechnen!

6.9. Bemerkung. Ein normierter VR $(X, \|.\|_X)$ ist genau dann ein Prä-Hilbertraum (d.h., die Norm $\|.\|_X$ wird von einem Skalarprodukt erzeugt), wenn $\|.\|_X$ der Parallelogrammgleichung genügt.
Bew.: [W, Y]

6.10. Definition. Sei $\mathcal{H} := (\mathcal{E}, \langle .\,,\, .\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. $\mathcal{H}$ heißt *Hilbertraum*, wenn der normierte VR $(\mathcal{E}, \|.\|)$ vollständig ist, d.h., wenn alle Cauchyfolgen aus $(\mathcal{E}, \|.\|)$ einen Limes in $\mathcal{E}$ besitzen.

Nach Theorem 1.10 besitzt jeder Prä-Hilbertraum eine Vervollständigung (als Banachraum). Man sieht leicht, daß die Norm auf der Vervollständigung wieder der Parallelogrammgleichung genügt. Daher ist die Vervollständigung eines Prä-Hilbertraums ein Hilbertraum. Alternativ kann man das Skalarprodukt im Beweis von Thm. 1.10 direkt auf die Vervollständigung übertragen.

6.11. Beispiele.
(1) Für $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{C}^d$ ein HR mit dem üblichen Skalarprodukt

$$\langle x\,,\, y\rangle := \sum_{k=1}^{d} x_k \overline{y}_k.$$

(2) Mit ℓ_2 ("klein-ell-zwei") bezeichnen wir die Menge der komplexen Zahlenfolgen

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \text{ mit } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty,$$

versehen mit dem Skalarprod.

$$\langle (x_n)\,,\,(y_n)\rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n.$$

Man zeigt (ÜA), daß ℓ_2 vollständig, also ein HR ist.
Bem.: Wegen

$$\left|\sum_{n=m}^{m+k} x_n\overline{y}_n\right| \le \sum_{n=m}^{m+k} |x_n||y_n| \le \frac{1}{2}\sum_{n=m}^{\infty}(|x_n|^2+|y_n|^2)$$

ist die Reihe $\sum x_n\overline{y}_n$ (absolut) konvergent in $\mathbb{C}$, falls (x_n) und (y_n) aus ℓ_2 sind.

(3) Für $-\infty \le a < b \le \infty$ definieren wir auf $C_c(a,b)$ ein Skalarprodukt

$$\langle .\,,\,.\rangle : C_c(a,b)\times C_c(a,b) \to \mathbb{C}$$

vermöge

$$\langle f\,,\,g\rangle := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x, \qquad f,g\in C_c(a,b).$$

Dar Paar $(C_c(a,b), \langle .\,,\,.\rangle)$ ist ein Prä-Hilbertraum.
Durch Vervollständigung von $C_c(a,b)$ erhält man den Raum $L_2(a,b)$. Der Raum $L_2(a,b)$ besteht aus (Äquivalenzklassen von) Borel-meßbaren Funktionen $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ mit $\int_{(a,b)}|f(x)|^2dx<\infty$. Dabei heißen zwei Funktionen äquivalent, wenn sie außerhalb einer Nullmenge übereinstimmen.

(4) *Direkte Summen von Hilberträumen.*
Seien $(\mathcal{H}_1, \langle .\,,\,.\rangle_1)$ und $(\mathcal{H}_2, \langle .\,,\,.\rangle_2)$ Hilberträume. Die Menge der Paare

$$(x_1,x_2)\in\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2,$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle (x_1,x_2)\,,\,(y_1,y_2)\rangle := \langle x_1\,,\,y_1\rangle_1 + \langle x_2\,,\,y_2\rangle_2$$

ist wieder ein HR und heißt die *direkte Summe der HRe $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$*, in Zeichen $\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$.

(5) *"Kontinuierliche" direkte Summen.*
Sei $-\infty\le a<b\le+\infty$, und sei $\mathcal{H}'$ ein HR mit Skalarprodukt $\langle .\,,\,.\rangle_{\mathcal{H}'}$. Sei

$$C_c((a,b);\mathcal{H}') := \{f:(a,b)\to\mathcal{H}' \text{ stetig } ;\ \mathrm{supp} f\subset(a,b),\ \mathrm{supp} f \text{ kompakt}\}$$

und
$$\langle f\,,\,g\rangle := \int_a^b \langle f(x)\,,\,g(x)\rangle_{\mathcal{H}'}\,\mathrm{d}x.$$
Dann ist das Paar $(C_c((a,b);\mathcal{H}'),\langle .\,,\,.\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. Die Vervollständigung (vgl. Beispiel (3)) wird mit
$$L_2((a,b);\mathcal{H}') \quad \text{oder} \quad \int_{(a,b)}^{\oplus} \mathcal{H}'\,\mathrm{d}x$$
bezeichnet. (Bem. zur Festkörperphysik, period. Schrödingeroperatoren: vgl. [RS-IV; Section XIII-16])

(6) *Tensorprodukte von HRen.* ([RS-I, W])

6.12. Definition. Die HRe $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ heißen *isometrisch isomorph* oder einfach *isomorph*, wenn es eine lineare, surjektive Abbildung
$$U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$$
gibt mit
$$\langle Ux\,,\,Uy\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x\,,\,y\rangle_{\mathcal{H}_1}\,, \qquad \forall x,y \in \mathcal{H}_1. \tag{6.9}$$
Eine surjektive lineare Abbildung U mit (6.9) heißt *unitär.* (Man sieht sofort, daß U auch injektiv, und damit bijektiv, ist.)

Bem.: Eine surj. Abb. $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ist genau dann unitär, wenn
$$\|Ux\|_{\mathcal{H}_2} = \|x\|_{\mathcal{H}_1}\,, \qquad \forall x \in \mathcal{H}_1, \tag{6.10}$$
gilt (Polarisierungsid.!).

2. Orthogonalität und der Darstellungssatz von Riesz.

Von zentraler Bedeutung für die Geometrie des HRs ist der Begriff der *Orthogonalität.*

6.13. Definition. Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-Hilbertraum.
(a) $f,g \in \mathcal{E}$ heißen *orthogonal* zueinander, falls $\langle f\,,\,g\rangle = 0$ ist; i.Z.: $f \perp g$.
(b) Für eine Teilmenge $M \subset \mathcal{E}$ definieren wir
$$M^{\perp} := \{f \in \mathcal{E}\,;\,\forall g \in M : f \perp g\}.$$

6.14. Theorem. (Pythagoras) *Sei $\mathcal{E}$ Prä-HR, und seien $f,g \in \mathcal{E}$ mit $f \perp g$. Dann gilt*
$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2\,. \tag{6.11}$$

6.15. Definition. Sei M ein linearer Teilraum des Prä-HR $\mathcal{E}$ und sei $f \in \mathcal{E}$. Ein Vektor $g \in M$ heißt *Orthogonalprojektion von f auf M*, falls $f - g \in M^{\perp}$ ist.

6.16. Theorem. (Der Projektionssatz)
Sei $\mathcal{H}$ ein HR, $M \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum. Dann besitzt jedes $x \in \mathcal{H}$ eine Orthogonalprojektion auf M; diese ist eindeutig bestimmt. Genauer gibt es zu jedem $x \in \mathcal{H}$ (eind. best.) Vektoren $z \in M$ und $z_\perp \in M^\perp$ mit

$$x = z + z_\perp. \tag{6.12}$$

Insbesondere können wir dann $\mathcal{H}$ zerlegen in der Form

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp. \tag{6.13}$$

Bemerkung. Wie man leicht sieht (Satz 6.17 oder ÜA), sind M und $M^\perp$ ihrerseits HRe und man kann die Notation $M \oplus M^\perp$ wie in Beispiel 6.11, (4), interpretieren.

Beweis des Proj.-Satzes.
Sei $x \in \mathcal{H}$ und d der Abstand von x zu M,

$$d := \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Nach Def. des Infimums gibt es Folge $(y_n) \subset M$ mit

$$\|x - y_n\| \to d, \qquad n \to \infty.$$

Dabei gilt zugleich für alle n

$$\|x - y_n\| \geq d.$$

Beh.: (y_n) ist Cauchyfolge.
Bew.:

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_k\|^2 &= \|(x - y_m) - (x - y_k)\|^2 \\
&=_{\text{Parellelogr.-gl.}} 2\|x - y_m\|^2 + 2\|x - y_k\|^2 - \|2x - y_m - y_k\|^2 \\
&= 2\left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_k\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_m + y_k)\right\|^2 \\
&\leq 2\left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_k\|^2\right) - 4d^2,
\end{aligned}$$

da $\frac{1}{2}(y_m + y_k) \in M$. Damit folgt

$$\|y_k - y_m\|^2 \to 2(d^2 + d^2) - 4d^2 = 0, \qquad m, k \to \infty,$$

und wir haben die Cauchyeigenschaft bewiesen.
Wegen $\mathcal{H}$ vollständig existiert ein $z \in \mathcal{H}$ mit

$$y_n \to z, \qquad n \to \infty.$$

Wegen $M = \overline{M}$ und $y_n \in M$ muß sogar $z \in M$ gelten. Weiter folgt wegen der Stetigkeit der Norm $\|.\|$

$$\|x - z\| = \|x - \lim y_n\| = \lim \|x - y_n\| = d.$$

Wir definieren jetzt

$$z_\perp := x - z,$$

sodaß jedenfalls $x = z + z_\perp$ gilt, und weisen noch $z_\perp \in M^\perp$ nach:
Für beliebiges $y \in M$ und $t \in \mathbb{R}$ ist $z + ty \in M$, also

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - (z + ty)\|^2 = \|z_\perp - ty\|^2 \\ &= d^2 - 2t\mathrm{Re}\,\langle z_\perp\,,\, y\rangle + t^2\,\|y\|^2\,, \end{aligned}$$

also

$$2t\mathrm{Re}\,\langle z_\perp\,,\, y\rangle \leq t^2\,\|y\|^2\,, \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

mithin $\mathrm{Re}\,\langle z_\perp\,,\, y\rangle = 0$. Analog zeigt man $\mathrm{Im}\,\langle z_\perp\,,\, y\rangle = 0$. Damit ist $\langle z_\perp\,,\, y\rangle = 0$, für alle $y \in M$, d.h.: $z_\perp \in M^\perp$.
Die Eindeutigkeit der Zerlegung von x ist einfach zu sehen: Sei auch $x = w + w_\perp$, mit $w \in M$ und $w_\perp \in M^\perp$. Dann gilt $x = z + z_\perp = w + w_\perp$, also $0 = z - w + z_\perp - w_\perp$ mit $z - w \in M$ und $z_\perp - w_\perp \in M^\perp$. Nach Pythagoras folgt $0 = \|z - w\|^2 + \|z_\perp - w_\perp\|^2$.
∎

Fakten zu M und $M^\perp$ (ÜA):

6.17. Satz. *Es seien M, N lineare Teilräume des HR $\mathcal{H}$. Dann gilt:*
(i) $M^\perp$ ist abgeschlossen.
(ii) $M \subset N \quad \Rightarrow \quad N^\perp \subset M^\perp$.
(iii) $\overline{M}^\perp = M^\perp$.
(iv) $\overline{M} = \mathcal{H} \quad \Longleftrightarrow \quad M^\perp = \{0\}$.
(v) $\overline{M} = M^{\perp\perp} (:= (M^\perp)^\perp)$.

Lineare Funktionale auf Hilberträumen.

Wegen der Schwarzschen Ungl. erzeugt jedes $g \in \mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ Prä-HR) eine stetige lineare Abb. $\ell_g : \mathcal{E} \to \mathbb{C}$ vermöge

$$\mathcal{E} \ni f \mapsto \ell_g(f) := \langle f\,,\, g\rangle \in \mathbb{C}. \tag{6.16}$$

(*Beweis der Stetigkeit:* Entweder Satz 3.11 verwenden plus $|\,\langle f\,,\, g\rangle\,| \leq \|f\|\,\|g\|$, oder direkt: Aus $f_n \to f$ in $\mathcal{E}$ folgt

$$|\ell_g(f_n) - \ell_g(f)| = |\,\langle f_n - f\,,\, g\rangle\,| \leq \|f_n - f\|\,\|g\| \to 0, \qquad n \to \infty.)$$

Aus der Schwarzschen Ungl. folgt auch sofort $\|\ell_g\| \leq \|g\|$. Wegen $\ell_g(g) = \|g\|^2$ erhalten wir

$$\|\ell_g\| = \|g\|\,. \tag{6.17}$$

Eine der wichtigsten Anwendungen des Projektionssatzes ist der *Darstellungssatz von Riesz.* Er besagt, daß es zu jedem stetigen lin. Funktional ℓ auf dem HR $\mathcal{H}$ ein $g \in \mathcal{H}$ gibt mit $\ell = \ell_g$:

6.18. Theorem. (Riesz) *Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann gibt es genau ein $g \in \mathcal{H}$ mit*

$$\ell(f) = \langle f\,,\, g\rangle\,, \qquad \forall f \in \mathcal{H}. \tag{6.18}$$

Beweis. Wegen ℓ linear ist der Kern von ℓ

$$M := \ker(\ell) := \{x \in \mathcal{H}\,;\, \ell(x) = 0\}$$

ein linearer TR; wegen ℓ stetig ist M auch abgeschlossen.
• Falls $M = \mathcal{H}$, wähle $g = 0$.
• Falls $M \neq \mathcal{H}$, so gibt es nach dem Projektionssatz (Thm. 6.16) ein $0 \neq h \in M^\perp$. Wir machen den Ansatz

$$g := c\,h,$$

wobei $0 \neq c \in \mathbb{C}$ so gewählt wird, daß

$$\ell(g) = \langle g\,,\, g\rangle \tag{6.19}$$

ist; c bestimmt sich also aus der Gleichung

$$c\,\ell(h) = c\overline{c}\,\langle h\,,\, h\rangle \tag{$*$}$$

mit $\ell(h) \neq 0$ und $\langle h\,,\, h\rangle = \|h\|^2 > 0$ (d.h., es ist $\overline{c} = \ell(h)/\langle h\,,\, h\rangle$).
Sei nun $f \in \mathcal{H}$. Für $f - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}g$ gilt

$$\ell\left(f - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}g\right) = \ell(f) - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}\ell(g) = 0,$$

also

$$f - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}g \in \ker(\ell) = M.$$

Wegen $g \in M^\perp$ und (6.19) folgt

$$0 = \left\langle f - \frac{\ell(f)}{\ell(g)}g\,,\, g\right\rangle = \langle f\,,\, g\rangle - \ell(f)\frac{\langle g\,,\, g\rangle}{\ell(g)} = \langle f\,,\, g\rangle - \ell(f).$$

Eindeutigkeit: Die Annahme $g,\, g' \in \mathcal{H}$ mit $\ell_g = \ell_{g'}$ impliziert $\langle u\,,\, g\rangle = \langle u\,,\, g'\rangle$, für alle $u \in \mathcal{H}$. Mit $u := g - g'$ folgt $\|g - g'\|^2 = 0$. ∎

6.19. Definition. Sei $\mathcal{H}$ HR. Wir definieren

$$\mathcal{H}^* := \{\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{C}\, ;\, \ell \text{ linear + stetig}\},$$

versehen mit der üblichen Norm von linearen Abbildungen. Dann heißt $(\mathcal{H}^*, \|.\|)$ der *Dualraum* zu $\mathcal{H}$.

6.20. Korollar. *Sei $\mathcal{H}$ ein HR. Dann ist $\mathcal{H}^*$ (anti-)isomorph zu $\mathcal{H}$.*

Bew.: Sei $j : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*$ def. durch

$$\mathcal{H} \ni g \mapsto j(g) := \ell_g = \langle .\,, g\rangle \in \mathcal{H}^*.$$

Nach Gl. (6.17) ist dabei

$$\|j(g)\|_{\mathcal{H}^*} = \|\ell_g\|_{\mathcal{H}^*} = \|g\|\,,$$

d.h., $j : \mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{H}^*$ isometrisch. Nach dem Rieszschen Darstellungssatz ist j aber auch surjektiv. Wegen

$$\langle .\,, \alpha g + \beta h\rangle = \overline{\alpha}\,\langle .\,, g\rangle + \overline{\beta}\,\langle .\,, h\rangle$$

ist j konjugiert linear (= anti-linear). Insgesamt ist damit j anti-unitär, mithin $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}^*$ anti-isomorph. ∎

Schwache Konvergenz.

Schwache Konvergenz einer Folge (x_n) in einem Banachraum X bedeutet, daß $(\lambda(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Zahlenfolge bildet für alle stetigen linearen Funktionale $\lambda \in X'$. Wenn wir diese Definition auf den Hilbertraum $\mathcal{H}$ übertragen und berücksichtigen, daß jedes stetige lineare Funktional auf $\mathcal{H}$ nach Riesz von der Form $\langle .\,, g\rangle$ ist, können wir folgendermaßen definieren:

6.21. Definition. (a) Eine Folge $(f_n) \subset \mathcal{H}$ heißt *schwach konvergent*, wenn die Zahlenfolgen $(\langle f_n\,, u\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ für alle $u \in \mathcal{H}$ konvergieren.
(b) Die Folge (f_n) *konvergiert schwach gegen* $f \in \mathcal{H}$, wenn

$$\langle f_n\,, u\rangle \to \langle f\,, u\rangle\,, \qquad \forall u \in \mathcal{H}. \tag{6.20}$$

Man schreibt dann $f_n \to_w f$, oder $f_n \to f$ (schwach), oder $w - \lim_{n\to\infty} f_n = f$, oder $f_n \rightharpoonup f$.

Bem.: (a) Schwache Konvergenz bedeutet “Koordinatenweise Konvergenz” und ist äquivalent mit $(\ell(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konverg. für alle $\ell \in \mathcal{H}^*$.
(b) Der schwache Limes ist eindeutig.
(c) Schwach konvergente Folgen sind beschränkt (vgl. Korollar 4.6).

6.22. Satz. (Schwache Folgenvollständigkeit des HRs.)
Sei $(f_n) \subset \mathcal{H}$ schwach konvergent im Sinne von Def. 6.21 (a). Dann gibt es ein $f \in \mathcal{H}$ mit

$$f_n \to_w f.$$

Beweis. Durch

$$\ell(v) := \lim_{n\to\infty} \langle v\,,\, f_n\rangle\,, \qquad \forall v \in \mathcal{H},$$

wird ein lineares Funktional auf $\mathcal{H}$ definiert. Wegen

$$|\ell(v)| = \lim |\,\langle v\,,\, f_n\rangle\,| \le (\limsup \|f_n\|)\, \|v\| \le C\, \|v\|$$

nach Schwarz und Kor. 4.6 ist ℓ beschränkt, also stetig. Nach Riesz gibt es daher ein $f \in \mathcal{H}$ mit

$$\ell(v) = \langle v\,,\, f\rangle\,, \qquad v \in \mathcal{H}.$$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

6.23. Satz. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ und sei $u \in \mathcal{H}$. Dann gilt:
(i) $u_n \longrightarrow u \quad \Rightarrow \quad u_n \to_w u$.
(ii) $u_n \to_w u \quad \Rightarrow \quad \|u\| \le \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|$.
(iii) $u_n \to_w u,\ \ \|u\| \ge \limsup_{n\to\infty} \|u_n\| \quad \Rightarrow \quad u_n \longrightarrow u$.
(iv) Sei $M = \overline{M}$ ein Unterraum von $\mathcal{H}$, $u \in \mathcal{H}$ und $(u_n)_n \subset M$ mit $u_n \to_w u$. Dann gilt $u \in M$.
(ÜA)

6.24. Theorem. Die (abgeschlossene) Einheitskugel im HR $\mathcal{H}$ ist *schwach folgenkompakt*, d.h., zu jeder Folge $(x_n) \subset \mathcal{H}$ mit $\|x_n\| \le 1$ gibt es eine schwach konvergente Teilfolge.

Bemerkung. Zwar folgt Theorem 6.24 aus dem Satz von Eberlein-Shmulyan (Thm. 4.7), es ist aber einfacher, Theorem 6.24 direkt zu beweisen. Dazu führt man in dem separablen Hilbertraum $\mathcal{H}' := \overline{\operatorname{span}\{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}}$ eine abzählbare Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein (s.u.!). Die komplexen Zahlenfolgen $(\langle x_n\,,\, e_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ sind für alle $k \in \mathbb{N}$ beschränkt, besitzen also konvergente Teilfolgen. Sukzessive Teilfolgenauswahl, Übergang zur Diagonalfolge, etc.

Orthonormalsysteme, Orthonormalbasen.

6.25. Definition. Sei $\mathcal{E}$ ein Prä-HR. Eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{E}$ (mit A bel. Indexmenge), heißt ein *Orthonormalsystem* (ONS), wenn

$$\begin{cases} \|x_\alpha\| = 1, & \forall \alpha \in A, \\ \langle x_\alpha\,,\, x_\beta\rangle = 0, & \forall \alpha,\beta \in A, \quad \alpha \ne \beta. \end{cases} \tag{6.21}$$

Kronecker-Notation für (6.21): $\langle x_\alpha\,,\, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$.

Beispiele.
(a) In ℓ_2 wird das Standard-ONS $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$e_i := (0,\ldots,0,1,0,0,\ldots),$$

mit der 1 an der i-ten Position.

(b) Im Prä-HR $C[0,2\pi]$ mit Skalarprodukt

$$\langle f\,,\,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

bilden die Funktionen $f_k(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin kx$, $k \in \mathbb{N}$, ein ONS.

6.26. Definition. Ein ONS $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{H}$, $\mathcal{H}$ HR, heißt eine *Orthonormalbasis* (ONB), wenn

$$\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}\{x_\alpha\,;\,\alpha \in A\}}. \tag{6.22}$$

Bem.: Äquivalent zu (6.22) ist die folgende Bedingung:

$$(\langle x\,,\,x_\alpha\rangle = 0, \quad \forall \alpha \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0. \tag{6.23}$$

Beweis der Äquivalenz zwischen (6.22) und (6.23):
(i) Sei (6.22) erfüllt und sei $\langle x\,,\,x_\alpha\rangle = 0$, für alle $\alpha \in A$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es eine endl. Linearkombination

$$y_\varepsilon = \sum_{i=1}^{m} a_i x_{\alpha_i}$$

mit

$$\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Dann:

$$\|x\|^2 = \langle x\,,\,x\rangle = \langle x\,,\,x-y_\varepsilon\rangle + \langle x\,,\,y_\varepsilon\rangle \leq \|x\|\,\|x-y_\varepsilon\| < \varepsilon\,\|x\|\,,$$

da $\langle x\,,\,y_\varepsilon\rangle = 0$.
(ii) Sei (6.23) erfüllt. Aus der Annahme

$$M := \overline{\operatorname{span}\{x_\alpha\,;\,\alpha \in A\}} \neq \mathcal{H}$$

folgt nach dem Projektionssatz die Existenz eines $0 \neq x \in M^\perp$. Offenbar gilt für dieses x dann $\langle x\,,\,x_\alpha\rangle = 0$, für alle $\alpha \in A$, Widerspruch! ∎

6.27. Satz. (Die Besselsche Ungleichung.)
Sei $\mathcal{E}$ Prä-HR und sei $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{E}$ ein ONS. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{E}$

$$\sum_{\alpha\in A} |\,\langle f\,,\,x_\alpha\rangle\,|^2 \leq \|f\|^2\,. \tag{6.24}$$

6.28. Satz. (Die Parsevalsche Gleichung.)
Sei $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{H}$ eine ONB im HR $\mathcal{H}$. Dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}$

$$\begin{cases} f = \sum_{\alpha\in A} \langle f\,,\,x_\alpha\rangle\, x_\alpha, \\ \|f\|^2 = \sum |\,\langle f\,,\,x_\alpha\rangle\,|^2. \end{cases} \tag{6.25}$$

Beweis Sätze 6.26/27: Wir schreiben $f_\alpha := \langle f\,,\,x_\alpha\rangle$, $\forall \alpha \in A$.
(1) Für bel. $n \in \mathbb{N}$ und bel. Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ und beliebige Indizes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ rechnen wir aus:

$$\begin{aligned}
\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_j x_{\alpha_j} \right\|^2 &= \langle -''- \,,\, -''- \rangle \\
&= \|f\|^2 - \Big\langle f\,,\, \sum c_j x_{\alpha_j} \Big\rangle - \Big\langle \sum c_j x_{\alpha_j}\,,\, f \Big\rangle + \Big\langle \sum c_j x_{\alpha_j}\,,\, \sum c_k x_{\alpha_k} \Big\rangle \\
&= \|f\|^2 - \sum \overline{c}_j f_{\alpha_j} - \sum c_j \overline{f}_{\alpha_j} + \sum |c_j|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum |f_{\alpha_j}|^2 + \sum |f_{\alpha_j} - c_j|^2 .
\end{aligned}$$

Für gegebene $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ wird daher das Minimum von $\left\| f - \sum c_j x_{\alpha_j} \right\|$ für die Wahl

$$c_j = f_{\alpha_j}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

angenommen. Weiter folgt

$$\left\| f - \sum f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum |f_{\alpha_j}|^2, \tag{6.26}$$

mithin

$$\sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j}|^2 \leq \|f\|^2 . \tag{$*$}$$

Hieraus folgt zunächst einmal, daß es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ höchstens abzählbar unendl. viele $\alpha \in A$ mit $\langle f\,,\,x_\alpha\rangle \neq 0$ geben kann. (Denn es gibt höchstens ein $\alpha \in A$ mit $|f_\alpha| = \|f\|$, es gibt höchstens zwei $\alpha \in A$ mit $|f_\alpha|^2 \geq \frac{1}{2}\|f\|^2$, etc.). Wir können uns also vorstellen, daß mit den α_j in Gleichung $(*)$ speziell diese Indizes gemeint sind. Da n beliebig war folgt die Besselsche Ungleichung.

(2) Sei nun $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine ONB und sei $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Abzählung der Indizes $\alpha \in A$ mit $f_\alpha \neq 0$.
Beh.: $f = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$.
Bew. der Beh.: Die Folge der Partialsummen $g_n := \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$ ist Cauchyfolge, denn für $m < n$ gilt

$$\|g_n - g_m\|^2 = \| \sum_{j=m+1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \|^2 = \sum_{m<j\leq n} \left| f_{\alpha_j} \right|^2 \to 0, \qquad m, n \to \infty,$$

wegen $\sum_{j=1}^{\infty} \left| f_{\alpha_j} \right|^2 < \infty$. Wir setzen

$$\tilde{f} := \lim g_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$$

und zeigen

$$\left\langle f - \tilde{f} \,,\, x_\alpha \right\rangle = 0, \qquad \forall \alpha \in A.$$

Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left\langle f - \tilde{f} \,,\, x_{\alpha_k} \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle f - \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \,,\, x_{\alpha_k} \right\rangle = f_{\alpha_k} - f_{\alpha_k} = 0,$$

während für $\alpha \in A$, $\alpha \notin \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$,

$$\left\langle \tilde{f} \,,\, x_\alpha \right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \,,\, x_\alpha \right\rangle = 0$$

und $\langle f \,,\, x_\alpha \rangle = 0$. Somit ist $\left\langle f - \tilde{f} \,,\, x_\alpha \right\rangle = 0$ für *alle* $\alpha \in A$, und es folgt $f = \tilde{f}$ oder

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} \left\langle f \,,\, x_{\alpha_j} \right\rangle x_{\alpha_j};$$

das ist die Parsevalsche Gleichung. Weiter können wir nun ausrechnen

$$\begin{aligned} \|f\|^2 = \|\tilde{f}\|^2 &= \| \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \|^2 = \lim_{n\to\infty} \| \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \|^2 \\ &=_{(6.23)} \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j}|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |f_{\alpha_j}|^2, \end{aligned}$$

was den zweiten Teil von Parseval ergibt. ∎

6.29. Theorem. *Jeder Hilbertraum besitzt eine ONB.*

Beweis. (Nur für den Fall eines separablen HRs $\mathcal{H}$.)
Wegen $\mathcal{H}$ separabel gibt es eine Folge $(y_k) \subset \mathcal{H}$ mit $\operatorname{span}\{y_k \,;\, k \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\mathcal{H}$. Ohne Einschränkung dürfen wir dabei zusätzlich $y_1 \neq 0$ annehmen und

$$y_{k+1} \notin \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_k\}, \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Wir definieren induktiv

$$x_1 := \frac{1}{\|y_1\|} y_1,$$

und

$$\xi_2 := y_2 - \langle y_2 \,,\, x_1 \rangle \, x_1, \qquad x_2 := \frac{1}{\|\xi_2\|} \xi_2.$$

Dann ist nämlich $\xi_2 \neq 0$ (da y_1, y_2 linear unabh.), span $\{x_1, x_2\} =$ span $\{y_1, y_2\}$ und

$$\langle \xi_2\,,\, x_1 \rangle = \langle y_2\,,\, x_1 \rangle - \langle y_2\,,\, x_1 \rangle \langle x_1\,,\, x_1 \rangle = 0,$$

sowie $\|x_2\| = 1$.
Insgesamt haben wir also $x_2 \perp x_1$, $\|x_2\| = 1$, und span$\{x_1, x_2\} =$ span$\{y_1, y_2\}$ erreicht.

Usw.: Seien $x_1, \ldots, x_n$ bereits konstruiert mit

$$\langle x_i\,,\, x_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

$$\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\} = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_n\}.$$

Setze

$$\xi_{n+1} := y_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle y_{n+1}\,,\, x_j \rangle\, x_j. \tag{6.27}$$

Dann:

$$\langle \xi_{n+1}\,,\, x_k \rangle = 0, \qquad \forall k = 1, \ldots, n,$$

und

$$\operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n, \xi_{n+1}\} = \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n+1}\}.$$

Setze $x_{n+1} := \frac{1}{\|\xi_{n+1}\|}\xi_{n+1}$. (E. Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren.) ∎

Bemerkung: Für nicht-separable HRe verwendet man als Hilfsmittel im Beweis von Theorem 6.29 das *Lemma von Zorn*, das zum *Auswahlaxiom* wie auch zum *Wohlordnungssatz* äquivalent ist. Dies ist Gegenstand der Mathematischen Logik. Das Lemma von Zorn wird im nächsten Par. eine große Rolle spielen!

Zum Abschluß des Paragraphen über Hilberträume bringen wir noch eine Anwendung des Satzes vom abgeschlossenen Graphen:

6.30. Satz. (Hellinger-Toeplitz)
Es sei $\mathcal{H}$ Hilbert-Raum, und $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ sei linear mit

$$\langle Tx\,,\, y \rangle = \langle x\,,\, Ty \rangle\,, \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Dann ist T beschränkt, d.h., es ist $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Beweis. Wir zeigen, daß $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist: Aus $x_n \to x$ und $Tx_n \to y$ folgt für alle $z \in \mathcal{H}$

$$\langle z\,,\, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z\,,\, Tx_n \rangle = \lim \langle Tz\,,\, x_n \rangle = \langle Tz\,,\, x \rangle = \langle z\,,\, Tx \rangle\,.$$

Also gilt $\langle z\,, Tx - y \rangle = 0$, für alle $z \in \mathcal{H}$, insbesondere für $z := Tx - y$. Mithin ist $\|Tx - y\|^2 = 0$, also $Tx = y$ und somit $(x, y) \in \Gamma(T)$. Die Behauptung folgt mit Theorem 4.13. ∎

Folgerung: Unbeschränkte (symmetrische) Operatoren können nur auf Teilräumen des Hilbertraums definiert werden!