¶5. Entwicklungen nach Hermite-Funktionen.

Wir zeigen in diesem Paragraphen zunächst, daß der Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ topologisch isomorph zum Folgenraum $\mathbf{s}_m$ ist. Zu diesem Zwecke definieren wir auf $\mathcal{S}$ eine äquivalente Familie von Halbnormen, die mit Hilfe von geeigneten L_2-Normen gebildet werden, und entwickeln (in L_2 und in $\mathcal{S}$) nach *Hermite-Polynomen.* Wir folgen hier ziemlich genau der Darstellung in [RS-I].

5.1. Definition. Für $m \in \mathbf{N}$ sei $\mathbf{s}_m$ der VR der *rasch abfallenden Multi-Folgen* $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^m}$ mit $a_\alpha \in \mathbf{C}$ und

$$q_k((a_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^m}) := \sup_{\alpha\in\mathbf{N}^m} |\alpha|^k |a_\alpha| < \infty, \tag{5.1}$$

für alle $k \in \mathbf{N}_0$.

5.2. Satz. *Wenn wir $\mathbf{s}_m$ mit Hilfe der in (5.1) definierten Familie von Halbnormen topologisieren, so ist $\mathbf{s}_m$ ein Fréchet-Raum. (ÜA)*
Eine zu $(q_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ äquivalente Familie von Halbnormen auf $\mathbf{s}_m$ wird durch

$$\|(a_\alpha)\|_\beta := \left(\sum_\alpha (\alpha+1)^{2\beta}|a_\alpha|^2\right)^{1/2}, \qquad \beta \in \mathbf{N}^m, \tag{5.2}$$

gegeben, wobei

$$(\alpha+1)^{2\beta} := \prod_{j=1}^m (\alpha_j+1)^{2\beta_j}.$$

(Beweis als ÜA)

Auch auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ führen wir nun eine Familie von L_2-Halbnormen ein:

5.3. Satz. *Auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ wird durch*

$$\|f\|_{\alpha,\beta;2} := \left\|x^\alpha D^\beta f\right\|_{L_2(\mathbf{R}^m)}, \qquad f \in \mathcal{S}, \quad \alpha,\beta \in \mathbf{N}_0^m, \tag{5.3}$$

eine zur Familie $(\varrho_{\alpha,\beta})$ aus Gl. (4.1) *äquivalente Familie von Halbnormen gegeben.*

Beweis. (Nur für $m = 1$.)
Wir schreiben $\|.\|_2 := \|.\|_{L_2(\mathbf{R})}$.
Wegen $(1+x^2)^{-1} \in L_2(\mathbf{R})$ gilt mit $C_0 := \left\|(1+x^2)^{-1}\right\|_2$ für beliebige $g \in \mathcal{S}$

$$\|g\|_2 \le \left\|(1+x^2)^{-1}\right\|_2 \cdot \left\|(1+x^2)g\right\|_\infty \le C_0 \left\|(1+x^2)g\right\|_\infty,$$

sodaß

$$\begin{aligned}\|f\|_{\alpha,\beta;2} = \left\|x^\alpha D^\beta f\right\|_2 &\le C_0 \left\|(1+x^2)x^\alpha D^\beta f\right\|_\infty \\ &\le C_0 \left(\varrho_{\alpha,\beta}(f) + \varrho_{\alpha+2,\beta}(f)\right).\end{aligned}$$

Umgekehrt folgt aus $g(x) = \int_{-\infty}^{x} g'(t)\mathrm{d}t$, daß

$$\|g\|_\infty \leq \|g'\|_1 \leq \left\|(1+x^2)g'\right\|_2 \cdot \left\|(1+x^2)^{-1}\right\|_2 = C_0 \left\|(1+x^2)g'\right\|_2 ,$$

wegen der Schwarzschen Ungl. Mit $(x^\alpha D^\beta f)' = \alpha x^{\alpha-1} D^\beta f + x^\alpha D^{\beta+1} f$ folgt daher (wenn wir oben $g := x^\alpha D^\beta f$ einsetzen)

$$\begin{aligned}\varrho_{\alpha,\beta}(f) &\leq C_0 \left\|(1+x^2)\left[\alpha x^{\alpha-1} D^\beta f + x^\alpha D^{\beta+1} f\right]\right\|_2 \\ &\leq C_0 \left\{\alpha \|f\|_{\alpha-1,\beta;2} + \|f\|_{\alpha,\beta+1;2} + \alpha \|f\|_{\alpha+1,\beta;2} + \|f\|_{\alpha+2,\beta+1;2}\right\}.\end{aligned}$$

∎

Die *Hermite-Funktionen* bilden eine ONB (Orthonormalbasis) im Hilbertraum $L_2(\mathbf{R})$; zugleich sind sie die Eigenfunktionen des *harmonischen Oszillators*

$$h := -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2;$$

die Funktion x^2 steht hier für den Multiplikationsoperator $M_{x^2}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, definiert durch

$$\varphi(x) \mapsto x^2\varphi(x), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Wir definieren zunächst die sog. *Leiteroperatoren* $A\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ und $A^\dagger\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ durch

$$A := \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}), \qquad A^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}),$$

und setzen

$$N := A^\dagger A = \frac{1}{2}(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2 - 1).$$

Es besteht die *Kommutatorrelation* (ÜA)

$$[A^\dagger, A] := A^\dagger A - AA^\dagger = -I.$$

Nach Par. 4 sind M_x und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$; beide lassen sich zu stetigen linearen Abb. von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$ fortsetzen. Insbesondere sind daher A, $A^\dagger$ und N stetig von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ wie auch von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$. Wir definieren nun auf $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ eine (letzte) Familie von Halbnormen durch

$$\|f\|_{n;2} := \|(N+1)^n f\|_2 , \qquad f \in \mathcal{S}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{5.4}$$

5.4. Satz. *Die Halbnormen $\|.\|_{n;2}$, $n \in \mathbf{N}$, bilden eine (gerichtete) Familie von Halbnormen auf $\mathcal{S}$, die äquivalent ist zur Familie $(\|.\|_{\alpha,\beta;2})$ aus* (5.2).

Im Beweis von Satz 5.4 verwenden wir das folgende Lemma:

5.5. Lemma. *Wenn $A^{\#}$ einen der Operatoren A oder $A^\dagger$ bezeichnet, so gilt für beliebige k-fache Produkte aus A und $A^\dagger$*

$$\left\| A_1^{\#} \cdot \ldots \cdot A_k^{\#} f \right\|_2^2 \leq \left\langle (N+k)^k f, f \right\rangle, \qquad f \in \mathcal{S},$$

wobei $\langle . \, , . \rangle$ das Standard-Skalarprodukt im Hilbertraum $L_2(\mathbf{R})$ bezeichnet.

Beweis. ÜA. ∎

Bem.: Linke Seite $= \left\langle (A_k^{\#})^* \cdot \ldots \cdot (A_1^{\#})^* \cdot A_1^{\#} \cdot \ldots \cdot A_k^{\#} f \, , \, f \right\rangle$.

Beweis von Satz 5.4.
(1) "gerichtete Familie von Halbnormen": einfache ÜA.
(2) Zu jedem n gibt es ein $M \in \mathbf{N}$ und α_j, β_j, $j = 1, \ldots, M$, mit

$$\|f\|_{n;2} \leq C \sum_{j=1}^{M} \|f\|_{\alpha_j, \beta_j; 2}, \qquad f \in \mathcal{S};$$

(klar, wenn man $(N+1)^n$ nach Binomi ausmultipliziert und $N = A^\dagger A$ einsetzt).
(3) Weniger trivial ist die umgekehrte Abschätzung: hier sucht man zu α, $\beta \in \mathbf{N}_0$ ein $k \in \mathbf{N}$ und eine Konstante $C \geq 0$ mit

$$\|f\|_{\alpha,\beta;2} \leq C \, \|f\|_{k;2}, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Seien also $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0$. Wegen $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(A + A^\dagger)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A - A^\dagger)$ können wir schreiben

$$x^\alpha D^\beta = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (A - A^\dagger) \right]^\alpha \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (A + A^\dagger) \right]^\beta,$$

d.h., $x^\alpha D^\beta$ ist *endliche* Summe aus Termen der Gestalt

$$c A_1^{\#} \cdot \ldots \cdot A_k^{\#},$$

mit $k = \alpha + \beta$; hierin steht jedes $A_j^{\#}$ für einen Faktor A oder einen Faktor $A^\dagger$. Mit Lemma 5.5 erhalten wir daher die Abschätzung

$$\left\| x^\alpha D^\beta f \right\|_2 \leq c_1 \left\| (N+k)^k f \right\|_2 \leq c_2 \left\| (N+1)^k f \right\|_2 = c_2 \, \|f\|_{k;2}, \qquad f \in \mathcal{S},$$

mit $k := \alpha + \beta$. ∎

Wir betrachten nun die (eindeutig bestimmte!) Funktion $\Phi_0 \in \mathcal{S}$, definiert durch $A\Phi_0 = 0$ und $\|\Phi_0\|_{L_2} = 1$, nämlich

$$\Phi_0(x) = \pi^{-1/4} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

und definieren weiter

$$\Phi_n(x) = (n!)^{-1/2}(A^\dagger)^n\Phi_0(x). \tag{$*$}$$

Man rechnet nach, daß

$$\Phi_n(x) = (2^n n!)^{-1/2}(-1)^n\pi^{-1/4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Die Funktionen Φ_n, $n \in \mathbf{N}_0$, heißen (die) *Hermite-Polynome* (oder: Hermite-Funktionen); sie sind die Eigenfunktionen des *harmonischen Oszillators*:

$$\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2\right)\Phi_n = (2n+1)\Phi_n, \qquad n \in \mathbf{N}_0. \tag{5.5}$$

5.6. Lemma. $(\Phi_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ *ist eine ONB im Hilbertraum* $L_2(\mathbf{R})$.

Beweis.
(1) Wir zeigen zunächst (5.5); dafür müssen wir $N\Phi_n = n\Phi_n$ nachweisen. Nun ist aber (wenn wir n-mal A mit $A^\dagger$ vertauschen und $\gamma_n := (n!)^{-1/2}$ schreiben)

$$N\Phi_n = A^\dagger A\Phi_n = \gamma_n A^\dagger A(A^\dagger)^n\Phi_0 = n\gamma_n(A^\dagger)^n\Phi_0 + \gamma_n(A^\dagger)^n A\Phi_0 = n\gamma_n(A^\dagger)^n\Phi_0 = n\Phi_n,$$

da $A\Phi_0 = 0$.
(2) Aus (5.5) folgt sofort, daß $\langle\Phi_j\,,\,\Phi_k\rangle = 0$ ist für $j \neq k$, da (mit partieller Integration)

$$(2j+1)\langle\Phi_j\,,\,\Phi_k\rangle = \left\langle -\Phi_j'' + x^2\Phi_j\,,\,\Phi_k\right\rangle = \left\langle \Phi_j\,,\,-\Phi_k'' + x^2\Phi_k\right\rangle = (2k+1)\langle\Phi_j\,,\,\Phi_k\rangle\,.$$

Man sieht leicht, daß $\|\Phi_n\| = 1$ ist.
(3) Es ist klar, daß Φ_n von der Gestalt

$$\Phi_n(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2},$$

ist, wobei P_n ein Polynom vom Grade n ist.
(4) Der von den Funktionen

$$\eta_k(x) := x^k\mathrm{e}^{-x^2/2}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

aufgespannte Teilraum ist dicht in $L_2(\mathbf{R})$, d.h., wenn $f \in L_2$ ist und $\langle f\,,\,\eta_k\rangle = 0$ gilt für alle $k \in \mathbf{N}_0$, dann muß schon $f = 0$ sein. (Ohne Bew.; vgl. zB [KF] und viele andere FA-Bücher. Nicht einfach, aber interessant!)
Die Anwendung des Orthogonalisierungsverfahrens von Gram-Schmidt auf die Funktionen x^k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, im Hilbertraum $L_2(\mathbf{R}; \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x)$ liefert daher eine **ONB** $(\psi_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$. Jedes ψ_n ist dabei von der Gestalt

$$\psi_n(x) = \tilde{c}_n\tilde{P}_n(x)\mathrm{e}^{-x^2/2},$$

$\tilde{P}_n$ Polynom vom Grade n. Da es höchstens *ein* ONS von der angegebenen Gestalt geben kann, folgt $\Phi_n = \psi_n$; insbesondere bilden die Φ_n eine ONB in $L_2(\mathbf{R})$. ∎

Bemerkung. Für $m > 1$ ist der Hilbertraum $L_2(\mathbf{R}^m)$ unitär äquivalent zu $L_2(\mathbf{R}) \otimes \ldots \otimes L_2(\mathbf{R})$, dem m-fachen Tensorprodukt von $L_2(\mathbf{R})$; vgl. zB [RS-I]. Aus der oben bewiesenen Tatsache, daß $(\Phi_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ eine ONB in $L_2(\mathbf{R})$ ist, folgt daher, daß die Hermite-Funktionen $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}_0^m}$ von m Veränderlichen,

$$\Phi_\alpha := \Phi_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \Phi_{\alpha_m}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{N}_0^m,$$

wobei

$$\Phi_\alpha(x_1, \ldots, x_m) = \Phi_{\alpha_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot \Phi_{\alpha_m}(x_m), \qquad x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m,$$

eine ONB des Hilbertraums $L_2(\mathbf{R}^m)$ bilden.

5.7. Theorem. *Die Fréchet-Räume $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ und $\mathbf{s}_m$ sind topologisch isomorph. Ein stetiger Isomorphismus wird durch die folgende* **Hermite-Entwicklung** *gegeben:*
Für $f \in \mathcal{S}$ ist die (Multi-)Folge der **Hermite-Koeffizienten**

$$(a_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}_0^m}, \qquad a_\alpha := \langle f\,,\, \Phi_\alpha \rangle = \int f(x)\overline{\Phi_\alpha(x)}\mathrm{d}x,$$

ein Element von $\mathbf{s}_m$. Die Zuordnung

$$J\colon \mathcal{S} \to \mathbf{s}_m, \qquad f \mapsto (\langle f\,,\, \Phi_\alpha \rangle)_{\alpha \in \mathbf{N}_0^m}$$

ist ein topolog. Isomorphismus. Die **Hermite-Entwicklung** *von f,*

$$f = \sum_\alpha a_\alpha \Phi_\alpha$$

konvergiert in der Fréchet-Topologie von $\mathcal{S}$.

Beweis. (Nur für $m = 1$.)
(1) Für $f \in \mathcal{S}$ sei $a_n := \langle f\,,\, \Phi_n \rangle$. Da $(\Phi_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ ONB, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n \Phi_n$ in $L_2(\mathbf{R})$ und die Summe der Reihe liefert gerade f, d.h.,

$$f = \sum_{n=0}^\infty a_n \Phi_n,$$

nach Parseval. Wegen $N^k\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ und $f \in \mathcal{S}$ ist auch $N^k f \in \mathcal{S} \subset L_2$. Nach Parseval gilt daher

$$\sum_{n=0}^\infty |\left\langle N^k f\,,\, \Phi_n \right\rangle|^2 = \left\| N^k f \right\|_2^2 < \infty,$$

mithin gilt

$$\begin{aligned}\infty > \sum_{n=0}^{\infty} |\left\langle N^k f\,,\,\Phi_n\right\rangle|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} |\left\langle f\,,\,N^k\Phi_n\right\rangle|^2\\ &=_{(5.5)} \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k} |\left\langle f\,,\,\Phi_n\right\rangle|^2\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{2k}|a_n|^2.\end{aligned}$$

$\Longrightarrow \quad (a_n)_{n\in\mathbf{N}_0} \in \mathbf{s}.$
Die obige Rechnung zeigt darüberhinaus, daß

$$\|f\|_{k;2} = \|(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}\|_k\,, \qquad k \in \mathbf{N}_0, \tag{5.6}$$

mit der Notation von Gln. (5.2) und (5.4).
(2) Die Zuordnung $f \mapsto (a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$, $a_n = \langle f\,,\,\Phi_n\rangle$, ist linear und injektiv (wegen (5.6)).
(3) $J\colon \mathcal{S} \to \mathbf{s}$ ist surjektiv: Sei $(a_n) \in \mathbf{s}$. Wir definieren

$$f_M := \sum_{n=0}^{M} a_n\Phi_n \in \mathcal{S}, \qquad M \in \mathbf{N}_0.$$

Dann gilt für $K > M$

$$\|f_K - f_M\|_{k;2}^2 = \sum_{n=M+1}^{K} |a_n|^2(n+1)^{2k} \to 0, \qquad M \to \infty.$$

Daher besitzt die Folge $(f_M)_{M\in\mathbf{N}}$ die Cauchyeigenschaft bzgl. jeder der Halbnormen $\|.\|_{k;2}$, ist also eine CF in $\mathcal{S}$.
$\mathcal{S}$ vollständig $\quad\Longrightarrow\quad$ es existiert ein $f \in \mathcal{S}$ mit $f_M \to f$ in $\mathcal{S}$.
Insbesondere gilt dann $f_M \to f$ in $L_2(\mathbf{R})$, woraus $\langle f\,,\,\Phi_n\rangle = a_n$ folgt für alle $n \in \mathbf{N}_0$.
$\Longrightarrow \quad J$ surjektiv.
(4) Die Stetigkeit von J und J^{-1} ergibt sich sofort aus (5.6). ∎

Nun können wir auch $\mathcal{S}'$ mit einem Folgenraum identifizieren:

5.8. Satz. *Der (topolog.) Dual von $\mathbf{s}_m$ ist der VR der polynomiell beschränkten (Multi-)-Folgen, d.h.,*

$$\mathbf{s}_m' = \{(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^m}\,;\, \exists C \geq 0,\, \exists\beta \in \mathbf{N}_0^m,\, \forall\alpha \in \mathbf{N}^m\colon |b_\alpha| \leq C(\alpha+1)^\beta\}.$$

Für $\ell = (b_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^m} \in \mathbf{s}_m'$ und $a = (a_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}^m} \in \mathbf{s}_m$ gilt dabei

$$\ell(a) = \sum_{\alpha\in\mathbf{N}^m} a_\alpha b_\alpha.$$

Beweis. ÜA. Vgl. auch FA I, Beispiel 3.19. ∎

5.9. Theorem. *Wenn wir für $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ die* **Hermite-Koeffizienten** *als*

$$b_\alpha := T(\Phi_\alpha), \qquad \alpha \in \mathbf{N}_0^m,$$

definieren, dann ist $(b_\alpha) \in \mathbf{s}'_m$. Für $T \in \mathcal{S}'$ und $b_\alpha = T(\Phi_\alpha)$ konvergiert die Reihe

$$\sum_\alpha b_\alpha \Phi_\alpha = \sum_\alpha b_\alpha \ell_{\Phi_\alpha}$$

in der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie gegen T.
Umgekehrt gibt es zu jedem $\ell = (b_\alpha) \in \mathbf{s}'_m$ ein $T \in \mathcal{S}'$ mit $T(\Phi_\alpha) = b_\alpha$ für alle $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$.

Beweis. (Nur für $m = 1$.) Sei $T \in \mathcal{S}'$. Dann gibt es ein $k \in \mathbf{N}$ und ein $C > 0$ mit

$$|T(\varphi)| \le C \, \|\varphi\|_{k;2} \, , \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

da die Familie der Halbnormen $\|.\|_{n;2}$ gerichtet ist.
Für die n-te Hermite-Funktion Φ_n gilt $\|\Phi_n\|_{k;2} = (n+1)^k$, und damit folgt

$$|b_n| = |T(\Phi_n)| \le C(n+1)^k, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

$\Longrightarrow \quad (b_n) \in \mathbf{s}'$.
Sei umgekehrt $(b_n) \in \mathbf{s}'$. Dann gibt es ein $k \in \mathbf{N}$ mit $|b_n| \le C(n+1)^k$. Wir definieren auf $\mathbf{s}$ ein lineares Funktional B durch

$$\mathbf{s} \ni (a_n) \mapsto B((a_n)) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n \in \mathbf{C}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} |B((a_n))| &\le \sum |b_n||a_n| \le C \sum (n+1)^k |a_n| \\ &\le C \left(\sum (n+1)^{2k+2} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum (n+1)^{-2} \right)^{1/2} \\ &\le C' \, \|(a_n)\|_{k+1} \, ; \end{aligned}$$

vgl. Def. 5.2 für die letzte Abschätzung.
Daher ist B ein stetiges lineares Funktional auf $\mathbf{s}$. Nach Thm. 5.7 sind die Fréchet-Räume $\mathcal{S}$ und $\mathbf{s}$ isomorph. Sei $J \colon \mathcal{S} \to \mathbf{s}$ der im Beweis von Thm. 5.7 angegebene Isomorphismus,

$$Jf := \left(\int f(x) \overline{\Phi_n(x)} \mathrm{d}x \right)_{n \in \mathbf{N}_0} .$$

Da $B \in \mathbf{s}'$, folgt

$$T := B \circ J \in \mathcal{S}',$$

d.h., die Folge $(b_n) \in \mathbf{s}'$ erzeugt in kanonischer Weise eine Distribution $T \in \mathcal{S}'$.

Behauptung: $T(\Phi_j) = b_j$ für alle $j \in \mathbf{N}_0$.
Bew. der Beh.: $T(\Phi_j) = B(J\Phi_j) = B((\delta_{jn})_{n\in\mathbf{N}})$, wobei $(\delta_{jn})_{n\in\mathbf{N}}$ die Folge bezeichnet, die an der j-ten Stelle eine 1 hat, ansonsten aber aus Nullen besteht.
$\Longrightarrow \quad T(\Phi_j) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \delta_{jn} = b_j$. •

Wir haben also eine (lineare) Abb.

$$\tilde{J}\colon \mathbf{s}' \to \mathcal{S}'$$
$$\mathbf{s}' \ni (b_n) \mapsto T := B \circ J \in \mathcal{S}'$$

konstruiert mit der Eigenschaft, daß $T(\Phi_j) = b_j$, $j \in \mathbf{N}_0$.
$\Longrightarrow \quad$ Die lin. Abb. $\tilde{J}$ ist injektiv.
Nach dem ersten Teil des Beweises ist $\tilde{J}$ aber auch surjektiv: Denn sei $T \in \mathcal{S}'$ und sei $(b_n) \in \mathbf{s}'$ die Folge der Hermite-Koeffizienten zu T. Dann sieht man leicht, daß für $B = B_{(b_n)}$ gemäß der obigen Konstruktion

$$T = B \circ J$$

gilt. ∎

5.10. Korollar. *$\mathcal{S}$ ist dicht in $\mathcal{S}'$ in der $\sigma(\mathcal{S}',\mathcal{S})$-Topologie.*

Beweis. Sei $T \in \mathcal{S}'$, mit Entwicklungskoeffizienten $(b_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{N}_0^m}$. Dann ist $\sum_{|\alpha|\le N} b_\alpha \Phi_\alpha \in \mathcal{S}$ und nach Thm. 5.9 konvergiert $\sum_{|\alpha|\le N} b_\alpha \ell_{\Phi_\alpha}$ gegen T in der $\sigma(\mathcal{S}',\mathcal{S})$-Topologie, mit $N \to \infty$. ∎

5.11. Korollar. *$\mathcal{S}$ ist separabel in der Fréchet-Topologie, $\mathcal{S}'$ ist separabel in der $\sigma(\mathcal{S}',\mathcal{S})$-Topologie.*

Bew. als ÜA.

5.12. Korollar. (Der Regularitätssatz für temperierte Distributionen; vgl. Thm. 4.15.) *Zu jeder temperierten Distribution $T \in \mathcal{S}'$ gibt es eine polynomiell beschränkte, stetige Funktion $g\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$ und ein $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ mit*

$$T = D^\alpha g,$$

wobei die Ableitung $D^\alpha g$ in $\mathcal{S}'$ gebildet wird.

Wir verwenden zwei einfache Lemmas (wieder mit $N = A^\dagger A$):

5.13. Lemma. *Sei $m = 1$. $T \in \mathcal{S}'$ habe die Entwicklungskoeffizienten $(b_n)_{n\in\mathbf{N}_0} \in \mathbf{s}'$, $b_n = T(\Phi_n)$ für $n \in \mathbf{N}_0$.*
Dann besitzt $(N+1)T$ die Koeffizienten $((n+1)b_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Beweis. Für $f \in \mathcal{S}$ ist

$$\begin{aligned}
[(N+1)T](f) &= T((N+1)f) \\
&= \sum_n b_n \ell_{\Phi_n}((N+1)f) \\
&= \sum_n b_n \left\langle \Phi_n \,,\, (N+1)\bar{f} \right\rangle \\
&= \sum_n b_n \left\langle (N+1)\Phi_n \,,\, \bar{f} \right\rangle \\
&= \sum_n (n+1) b_n \left\langle \Phi_n \,,\, \bar{f} \right\rangle \\
&= \sum_n (n+1) b_n \ell_{\Phi_n}(f).
\end{aligned}$$

∎

5.14. Lemma. *Sei Φ_n die n-te Hermite-Funktion, $n \in \mathbf{N}_0$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit*

$$\|\Phi_n\|_\infty \le C(n+1)^{3/2}, \qquad n \in \mathbf{N}_0.$$

Bemerkung. Man kann sogar

$$\|\Phi_n\|_\infty \le C(n+1)^{-1/12}, \qquad n \in \mathbf{N}_0,$$

zeigen (vgl. [RS-I]); diese Abschätzung ist optimal.

Beweis. Für bel. $f \in \mathcal{S}$ gilt die Abschätzung aus dem Bew. von Satz 5.3

$$\|f\|_\infty \le c_1 \left\|(1+x^2)f'\right\|_2 .$$

Wegen $\Phi_n \in \mathcal{S}$ und $\sqrt{2}x = A^\dagger + A$, $\sqrt{2}\frac{d}{dx} = A - A^\dagger$, folgt

$$\begin{aligned}
\|\Phi_n\|_\infty &\le c_1 \left\|(A - A^\dagger)\Phi_n\right\|_2 + c_1 \left\|(A^\dagger + A)^2 (A - A^\dagger)\Phi_n\right\|_2 \\
&\le_{\text{Lemma 5.5}} c_2 \left\langle N\Phi_n \,,\, \Phi_n\right\rangle^{1/2} + c_2 \left\langle N^3\Phi_n \,,\, \Phi_n\right\rangle^{1/2} \\
&\le c_3 (n+1)^{3/2} \|\Phi_n\|_2 .
\end{aligned}$$

∎

Beweis von Kor. 5.12. Sei $T \in \mathcal{S}'$ mit den Entwicklungskoeff. $(b_n) \in \mathbf{s}'$. Dann gibt es $E > 0$ und $k \in \mathbf{N}$ mit

$$|b_n| \le E(n+1)^k, \qquad n \in \mathbf{N}_0.$$

Sei

$$a_n := (n+1)^{-k-3} b_n, \qquad n \in \mathbf{N}_0.$$

Dann gilt wegen Lemma 5.14

$$\sum |a_n| \, \|\Phi_n\|_\infty \le E \sum (n+1)^{-3/2} < \infty,$$

und daher konvergiert die Reihe $\sum a_n \Phi_n$ gleichmäßig auf $\mathbf{R}$ gegen eine Funktion $F \in C_0(\mathbf{R})$. Die Distribution $\ell_F \in \mathcal{S}'$ hat die Hermite-Koeff. $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$.
Nach Lemma 5.13 hat $(N+1)^{k+3} F \in \mathcal{S}'$ die Hermite-Koeff. $(n+1)^{k+3} a_n = b_n$, d.h.,

$$\begin{aligned} T &= (N+1)^{k+3} F \qquad (\text{in } \mathcal{S}') \\ &= 2^{-k-3} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 \right)^{k+3} F. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$T = \sum_{j \le 2k+6} P_j(x) \left(\frac{d}{dx} \right)^j F, \qquad (\text{Distrib.-Abl.}) \tag{$*$}$$

wobei P_j Polynom in x vom Grade $\le 2k+6$ ist. Aus $(*)$ folgt dann die Beh. (ÜA). ∎

5.15. Korollar. (Satz vom Kern, *"nuclear theorem".*)
Sei $B\colon \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathbf{C}$ bilinear und stetig (separat in beiden Variablen, also gemeinsam in beiden Variablen; vgl. Kor. 3.7).
Dann gibt es eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$ mit

$$B(f,g) = T(f \otimes g), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m).$$

Bem.: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist $f \otimes g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+m})$ definiert durch

$$(f \otimes g)(x,y) := f(x) g(y), \qquad x \in \mathbf{R}^n, \quad y \in \mathbf{R}^m.$$

Beweis. B stetig gemeinsam in beiden Variablen
$\Longrightarrow$
Es gibt $r, s \in \mathbf{N}_0^m$ und $C > 0$ mit

$$|B(f,g)| \le C \, \|f\|_{r;2} \cdot \|g\|_{s;2}, \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \quad g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m).$$

Setzt man speziell $f := \Phi_\alpha$, $g := \Phi_\beta$ (Hermite-Fktn.) ein, so ergibt sich wegen $\|\Phi_\alpha\|_{r;2} = (1+\alpha)^r$

$$|B(\Phi_\alpha, \Phi_\beta)| \le C(\alpha+1)^r (\beta+1)^s = C[(\alpha,\beta)+1]^{(\alpha,\beta)},$$

mit $(\alpha,\beta) := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) \in \mathbf{N}_0^{n+m}$, und analog für (r,s).
Für $b_{(\alpha,\beta)} := B(\Phi_\alpha, \Phi_\beta)$ folgt daher

$$\left(b_{(\alpha,\beta)} \right)_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{N}_0^{n+m}} \in \mathbf{s}'_{n+m}.$$

Nach Thm. 5.9 gibt es also eine Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$ mit

$$T(\Phi_\alpha \otimes \Phi_\beta) = b_{(\alpha,\beta)}.$$

Seien nun $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$. Nach Thm. 5.8 gilt $f = \sum a_\alpha \Phi_\alpha$ und $g = \sum c_\beta \Phi_\beta$; beide Reihen konvergieren in der Fréchet-Topologie von $\mathcal{S}$.
$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} T(f \otimes g) &= T\left([\sum a_\alpha \Phi_\alpha] \otimes [\sum c_\beta \Phi_\beta]\right) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha c_\beta T(\Phi_\alpha \otimes \Phi_\beta) \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha c_\beta b_{(\alpha,\beta)} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha c_\beta B(\Phi_\alpha, \Phi_\beta) \\ &= B(f,g). \end{aligned}$$

(Die zweite Gleichheit folgt aus der Stetigkeit von T und der Konvergenz der beiden Reihen in $\mathcal{S}$; die letzte Gleichheit folgt aus der Stetigkeit von B.)

∎

Bemerkung. Die Gaußfunktion Φ_0 löst die Dgl. 2. Ordnung

$$-u'' + x^2 u = u, \tag{$*$}$$

und die weiteren Hermite-Funktionen haben wir mit Hilfe der Leiteroperatoren aus Φ_0 gewonnen. Die DGl. $(*)$ hat natürlich einen 2-dimensionalen Lösungsraum, und man könnte auf die Idee kommen, mit einer der anderen Lösungen zu arbeiten. Man kann aber zeigen (nicht ganz einfach!), daß die Lösungen, die nicht Vielfache von Φ_0 sind, bei $\pm\infty$ sehr stark anwachsen (dem Betrage nach), und daher *nicht* in $L_2(\mathbf{R})$ liegen.