¶5. Lineare Operatoren, Resolvente und Spektrum.

Wir beginnen mit einem kleinen "Katalog" von Beispielen beschränkter linearer Operatoren.

5.1. Beispiel. Stetige lineare Operatoren auf Folgenräumen.

(a) *Multiplikationsoperatoren auf ℓ_p.*
Sei $w \in \ell_\infty$ fest gewählt und sei $p \in [1, \infty]$. Dann ist

$$M_w : \ell_p \to \ell_p, \qquad \ell_p \ni x \mapsto (w_k x_k)_{k \in \mathbf{N}},$$

ein beschr. lin. Operator mit Norm $\|M_w\|_{\ell_p, \ell_p} = \|w\|_\infty$.
(b) Rechts- und Linksshift auf ℓ_p. Gewichtete Shift-Operatoren.
Sei $p \in [1, \infty]$ und sei $x = (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \ell_p$.
Linksshift: $x \mapsto Lx := (x_2, x_3, \ldots) \in \ell_p$;
Rechtsshift: $x \mapsto Rx := (0, x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p$.
Offenbar gilt $\|Lx\|_p \leq \|x\|_p$ und $\|Rx\|_p = \|x\|_p$.
Mit einer festen Folge $w \in \ell_\infty$ kann man analog gewichtete Shift-Operatoren definieren, etwa durch

$$x \mapsto (w_1 x_2, w_2 x_3, w_3 x_4, \ldots);$$

gewichtete Shifts haben die Form RM_w, $M_w R$, LM_w oder $M_w L$, mit M_w wie in (a); das obige Beispiel ist offenbar $M_w L$.
(c) Allgemeiner kann man (halb-unendliche) Matrizen $(w_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}$, mit $w_{ij} \in \mathbf{C}$, betrachten. Unter der Voraussetzung

$$A := \sup_{k \in \mathbf{N}} \sum_{j=1}^{\infty} |w_{kj}| < \infty,$$

folgt, daß

$$x \mapsto (y_k)_{k \in \mathbf{N}},$$

mit

$$y_k := \sum_{j=1}^{\infty} w_{kj} x_j, \qquad k \in \mathbf{N},$$

einen beschränkten Operator von $\ell_\infty \to \ell_\infty$ mit Norm $\leq A$ erzeugt.

Bemerkung. Es ist schwer bis unmöglich, scharfe Bedingungen dafür anzugeben, daß eine Matrix $(w_{kj})_{k,j \in \mathbf{N}}$ einen beschränkten Operator von ℓ_p nach ℓ_p erzeugt. Für $p = 2$ wurde eine ziemlich gute hinreichende Bedingung von I. Schur angegeben.

Bemerkung. Natürlich kann man hier allgemeiner die Frage stellen, wann der von einer Matrix erzeugte lineare Operator stetig von ℓ_p nach ℓ_q abbildet, etc.

5.2. Beispiel. Stetige lineare Operatoren auf Funktionenräumen.

(a) Mulitplikationsoperatoren.

Für $V\colon [0,1] \to \mathbf{C}$ stetig und beschränkt ist

$$M_V\colon (C[0,1], \|.\|_\infty) \to (C[0,1], \|.\|_\infty), \qquad f \mapsto Vf,$$

ein stetiger linearer Operator mit Norm $\|M_V\| = \|V\|_\infty$.
Analog für die Multiplikation auf $L_p(\Omega)$ mit $V \in L_\infty(\Omega)$.

(b) Integraloperatoren.
(1) Für $K\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbf{C}$ stetig definiert

$$C[0,1] \ni f \mapsto \int_0^1 K(.,y)f(y)\mathrm{d}y \in C[0,1] \tag{5.1}$$

einen beschr. linearen Operator (wenn wir wieder die $\|.\|_\infty$-Norm verwenden).
Wenn $K = K(x,y)$ eine meßbare, beschränkte Funktion auf $\Omega \times \Omega$ ist, so erzeugt

$$L_1(\Omega) \ni f \mapsto \int_\Omega K(\cdot,y)f(y)\mathrm{d}y \in L_\infty(\Omega) \tag{5.2}$$

einen beschr. lin. Operator (bzgl. der kanonischen Normen auf L_1 und auf L_∞).
Analog kann man sich fragen, wann ein Integraloperator stetig von $L_p(\Omega)$ nach $L_q(\Omega)$ abbildet; hier nützt man die Höldersche Ungleichung und ihre Varianten aus.
(2) Sei $g \in L_1(\mathbf{R})$. Dann erzeugt die *Faltung*

$$L_1(\mathbf{R}) \ni f \mapsto f * g := \int_{\mathbf{R}} g(. - y)f(y)\mathrm{d}y \in L_1(\mathbf{R})$$

einen beschr. linearen Operator. Dabei gilt genauer

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 \, .$$

(Faltungsalgebra, es gibt keine Eins!)
(3) Für Funktionen $u \in C_c(\mathbf{R})$ wird die *Fouriertransformation* $\mathcal{F}$ definiert durch

$$(\mathcal{F}u)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x)\mathrm{d}x.$$

Man kann zB zeigen, daß sich $\mathcal{F}$ in eindeutiger Weise zu einer stetigen linearen Abb. von $L_1(\mathbf{R})$ nach $C_0(\mathbf{R})$ fortsetzen läßt, aber auch zu einer isometrischen, bijektiven, Abb. von $L_2(\mathbf{R})$ nach $L_2(\mathbf{R})$. (Die Abb. $\mathcal{F}\colon L_1(\mathbf{R}) \to C_0(\mathbf{R})$ ist nicht surjektiv.)

Dieser Katalog ist in keinster Weise vollständig! Allerdings ist es kein Zufall, daß *keine Differentialoperatoren* auftauchen. Diese führen i.a. zu *unbeschränkten* Operatoren, für die man eine eigene Theorie entwickelt hat.

Wir wenden uns nun den Grundlagen der Spektraltheorie der linearen Operatoren zu.

5.3. Definition. Sei X BR über $\mathbf{C}$, $T \in \mathcal{B}(X) := \mathcal{B}(X,X)$. Die Menge

$$\varrho(T) := \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\, T - \lambda I : X \to X \text{ bijektiv } \}$$

heißt *die Resolventenmenge von* T. Das Komplement

$$\sigma(T) := \mathbf{C} \setminus \varrho(T)$$

heißt *das Spektrum von* T.

Für $\lambda \in \varrho(T)$ ist $T - \lambda$ stetig und bijektiv; nach dem Satz von der inversen Abb. ist daher auch $(T-\lambda)^{-1} : X \to X$ stetig.
Wir schreiben jetzt $T - \lambda$ statt $T - \lambda I$.

5.4. Theorem. (Die Neumannsche Reihe.) *Sei* $T \in \mathcal{B}(X)$ *und* $\lambda_0 \in \varrho(T)$. *Dann konvergiert die Reihe*

$$S_\lambda := (T-\lambda_0)^{-1}\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n (T-\lambda_0)^{-n}\right\}$$

für $|\lambda - \lambda_0| < 1/\left\|(T-\lambda_0)^{-1}\right\|$ *in der Norm von* $\mathcal{B}(X)$ *und definiert einen Operator* $S_\lambda \in \mathcal{B}(X)$, *der der Gleichung*

$$S_\lambda(T-\lambda) = I_X = (T-\lambda)S_\lambda$$

genügt.
Insbesondere ist $\{\lambda \in \mathbf{C}\,;\, |\lambda-\lambda_0| < 1/\left\|(T-\lambda_0)^{-1}\right\|\} \subset \varrho(T)$. *Daher ist* $\varrho(T)$ *eine offene Teilmenge von* $\mathbf{C}$, $\sigma(T)$ *ist abgeschlossen.*

Beweis-Idee: “Bruchrechnen”!

$$\begin{aligned}\frac{1}{T-\lambda} &= \frac{1}{(T-\lambda_0)+(\lambda_0-\lambda)} \\ &= \frac{1}{T-\lambda_0}\cdot\frac{1}{1+(\lambda_0-\lambda)(T-\lambda_0)^{-1}} \\ &= \frac{1}{T-\lambda_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda-\lambda_0}{T-\lambda_0}\right)^n\end{aligned}$$

wegen der geometrischen Reihe. Ein “richtiger Beweis” untersucht dann noch die Konvergenz der Reihe in $\mathcal{B}(X)$ etc. ∎

5.5. Satz. Für $T \in \mathcal{B}(X)$ gilt $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbf{C}\,;\, |\lambda| \le \|T\|\}$.

Beweis-Idee. Für $\lambda \in \mathbf{C}$ mit $|\lambda| > \|T\|$ liefert “Bruchrechnen”

$$\frac{1}{T-\lambda} = \frac{-1}{\lambda}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\lambda}T} = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}T\right)^n\right);$$

Die Reihe konvergiert in $\mathcal{B}(X)$, etc. ∎

5.6. Satz. *Für $T \in \mathcal{B}(X)$ ist stets $\sigma(T) \neq \emptyset$.*

Beweis. Nach dem Bew. zu Satz 5.5 ist

$$(T-\lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n}\right), \qquad |\lambda| > \|T\|,$$

also $\left\|(T-\lambda)^{-1}\right\| \to 0$, mit $\lambda \to \infty$. Wäre nun $\sigma(T)=\emptyset$, so wäre für alle $x \in X$, $\varphi \in X'$ die Abbildung

$$\mathbf{C} \ni \lambda \mapsto \left\langle (T-\lambda)^{-1}x\,,\,\varphi\right\rangle_{X,X'} \in \mathbf{C}$$

eine ganze analytische Funktion, die mit $|\lambda| \to \infty$ gegen Null geht. Nach dem Satz von *Liouville* aus der Funktionentheorie muß diese Funktion konstant sein; da sie bei ∞ gegen Null geht, muß sie schon identisch gleich Null sein, d.h.,

$$\left\langle (T-\lambda)^{-1}x\,,\,\varphi\right\rangle_{X,X'} = 0, \qquad \forall x \in X, \varphi \in X'.$$

Daraus folgt aber (da X' die Punkte von X trennt, nach Hahn-Banach), daß $(T-\lambda)^{-1} = 0$ ist, für alle $\lambda \in \mathbf{C}$, Widerspruch! ∎

5.7. Definition. Sei X BR, $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann heißt

$$r(T) := \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

der *Spektralradius von T*.

5.8. Theorem. *Sei X BR, $T \in \mathcal{B}(X)$. Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ und ist gleich dem Spektralradius.*

Beweis ist etwas länglich. Im Hilbertraum gilt für symmetrische Operatoren A sogar $r(A) = \|A\|$.

5.9. Definition. Sei $T \in \mathcal{B}(X)$.
(a) Wenn für ein $0 \neq x \in X$ und ein $\lambda \in \mathbf{C}$ die Gleichung

$$Tx = \lambda x$$

besteht, so nennt man λ einen *Eigenwert von T*, und x einen *Eigenvektor von T zum Eigenwert λ*.
Wenn $\lambda \in \mathbf{C}$ ein EW von T ist, dann ist $T - \lambda I$ nicht injektiv, also gilt dann $\lambda \in \sigma(T)$.
Die Menge aller Eigenwerte von T bildet das *Punktspektrum* $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.
(b) Sei $\lambda \in \mathbf{C}$ kein Eigenwert von T. Wenn $\mathrm{ran}(T - \lambda I)$ *nicht* dicht in X ist, so gehört λ zum *Residualspektrum von T*: $\sigma_{\mathrm{res}}(T)$

(c) Wenn $T - \lambda I$ injektiv ist und $\overline{\operatorname{ran}(T-\lambda I)} = X$ ist, aber $\operatorname{ran}(T-\lambda I) \neq X$, so gehört λ zum *kontinuierlichen Spektrum von* T: $\sigma_{\text{kont}}(T)$.

Dies liefert eine disjunkte Zerlegung des Spektrums: Es ist $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$, $\sigma_{\text{res}}(T) \subset \sigma(T)$, $\sigma_{\text{kont}}(T) \subset \sigma(T)$, die drei Mengen sind paarweise disjunkt, und es gilt

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{\text{res}}(T) \cup \sigma_{\text{kont}}(T).$$

• Dualität und Spektrum.

Es seien X, Y normierte VRe, und es sei $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Der lineare Operator $T' : Y' \to X'$, definiert durch

$$T'\varphi := \varphi \circ T, \qquad \varphi \in Y', \tag{5.3a}$$

d.h.,

$$(T'\varphi)(x) = \varphi(Tx), \qquad \forall \varphi \in Y', \quad \forall x \in X, \tag{5.3b}$$

heißt *der zu* T *duale Operator* (oder: *die Adjungierte*). Es ist $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$; s.u.!

Notation mit dualer Paarung: $\langle Tx\,,\,\varphi\rangle_{Y,Y'} = \langle x\,,\,T'\varphi\rangle_{X,X'}$, für alle $x \in X$, $\varphi \in Y'$.

(Wegen $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $\varphi \in \mathcal{B}(Y, \mathbf{C})$ ist in der Tat $T'\varphi : X \to \mathbf{C}$ ein stetiges lineares Funktional, d.h., $T'\varphi \in X'$.)

5.10. Satz. (vgl. Satz 9.2) $\|T'\| = \|T\|$.

5.11. Theorem. (Phillips; siehe [Y]))
Sei X *BR,* $T \in \mathcal{B}(X)$ *und* $T' \in \mathcal{B}(X')$ *der zu* T *duale Operator. Dann gilt*

$$\sigma(T) = \sigma(T'), \qquad \varrho(T) = \varrho(T'), \qquad \left[(T-\lambda)^{-1}\right]' = (T'-\lambda)^{-1}, \quad \forall \lambda \in \varrho(T).$$

Bem.: Im Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist hingegen $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$ und $\left[(A-\lambda)^{-1}\right]^* = (A^* - \overline{\lambda})^{-1}$.

• **Riesz-Schauder-Theorie** (Vgl. Par. 10 der Vorlesung.)

5.12. Definition. $K\colon X \to X$ heißt *kompakt*, wenn das Bild der Einheitskugel unter K eine relativ-kompakte Teilmenge von X ist.

5.13. Theorem (Riesz, Schauder)
(*a*) *T kompakt* $\iff$ *T' kompakt.*
(*b*) $\sigma(T) \setminus \{0\}$ *besteht aus Eigenwerten, und zwar höchstens abzählbar unendlich vielen. Als einziger Häufungspunkt der Eigenwerte kommt* 0 *in Frage.*
(*c*) *Die Vielfachheit der Eigenwerte* $\neq 0$ *ist endlich.*
(*d*) *Für* $\lambda \neq 0$ *gilt:* $\lambda \in \sigma(T) \iff \lambda \in \sigma(T')$.

Bem.: Anwendungen bei Integralgleichungen, Fredholmsche Alternative.