¶4. Der Schwartzraum $\mathcal{S}$ und der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'$.

Notation. $\mathbf{N}_0^m$:= Menge der m-Tupel nicht-negativer ganzer Zahlen, d.h.,

$$\alpha \in \mathbf{N}_0^m \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m), \quad \text{mit } \alpha_j \in \mathbf{N}_0.$$

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j, \qquad D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_m}^{\alpha_m}}, \qquad x^\alpha := {x_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {x_m}^{\alpha_m},$$

für $x \in \mathbf{R}^m$.
Auf $C^\infty(\mathbf{R}^m)$ definieren wir eine Familie von Funktionen (mit Werten in $[0, \infty]$)

$$\varrho_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \left| x^\alpha D^\beta \varphi(x) \right|, \qquad \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^m), \tag{4.1}$$

für $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^m$.

4.1. Definition.

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^m) := \{\varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^m; \mathbf{C})\ ;\ \varrho_{\alpha,\beta}(\varphi) < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^m\} \tag{4.2}$$

heißt der *V-Raum der rasch abfallenden Funktionen* oder der *Schwartz-Raum*.

Bem.: Wenn $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist, dann klingen φ (und alle Ableitungen $D^\alpha\varphi$) rascher ab als jede Funktion $(1 + |x|)^{-k}$, für alle $k \in \mathbf{N}$.

Beispiele. (für Funktionen aus $\mathcal{S}$.)

(i) Es ist $C_c^\infty(\mathbf{R}^m) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$. Wegen C_c^∞ dicht in $L_p(\mathbf{R}^m)$, für $1 \leq p < \infty$, ist daher auch $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ dicht in $L_p(\mathbf{R}^m)$. (Daß $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \subset L_p(\mathbf{R}^m)$ gilt, zeigen wir weiter unten.)

(ii) $\mathrm{e}^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, für $a > 0$. Allgemeiner ist für jedes Polynom $P(x)$ die Funktion $P(x)\mathrm{e}^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, für $a > 0$. ($\to$ Hermite-Polynome!)

(iii) Sei $1 \leq p < \infty$ und $f \in L_p(\mathbf{R}^m)$ habe kompakten Träger in $\mathbf{R}^m$, d.h., es gibt eine Kugel $B_R \in \mathbf{R}^m$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbf{R}^m$ mit $|x| > R$. Dann ist die durch *Faltung* erzeugte Funktion

$$f * \mathrm{e}^{-a|\cdot|^2} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m), \qquad a > 0,$$

wobei

$$\left(f * \mathrm{e}^{-a|\cdot|^2}\right)(x) := \int_{\mathbf{R}^m} f(y)\mathrm{e}^{-a|x-y|^2}\, dy.$$

Weiter gilt

$$f * \left[(4\pi t)^{-m/2}\mathrm{e}^{\frac{-|x|^2}{4t}}\right] \to f \quad \text{in } L_p(\mathbf{R}^m), \qquad t \downarrow 0.$$

(ÜA) Dieses Resultat gehört eigentlich in die Partiellen DGln., wenn man das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung studiert.

4.2. Theorem. *Der VR $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist mit den von den Halbnormen $\varrho_{\alpha,\beta}$, mit $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^m$, erzeugten Topologie ein Fréchet-Raum.*
Eine äquivalente Familie von Halbnormen wird gegeben durch

$$p_k(\varphi) := \sup_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\mathbf{R}^m} (1+|x|)^k |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m),\ k \in \mathbf{N}_0. \tag{4.3}$$

Die Familie $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ist gerichtet.

Bew. (für $m = 1$): ÜA.

4.3. Definition. Der Raum der stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ wird mit $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ bezeichnet und heißt Raum der *temperierten Distributionen.*

Auf $\mathcal{S}'$ erzeugt jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ die Halbnorm

$$p_\varphi(\ell) := |\ell(\varphi)|, \qquad \ell \in \mathcal{S}'.$$

Die Familie $(p_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{S}}$ trennt die Punkte von $\mathcal{S}'$. Die $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie ist die von der Familie $(p_\varphi)_{\varphi\in\mathcal{S}}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie (diese Topologie ist *nicht* metrisierbar). Man bezeichnet sie auch als die schwach*-Topologie auf $\mathcal{S}$.

4.4. Beispiel. $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$.
Für $f \in \mathcal{S}$ betrachten wir das lineare Funktional ℓ_f

$$\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} f(x)\varphi(x)dx =: \ell_f(\varphi).$$

Dann gilt

$$|\ell_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L_1(\mathbf{R}^m)} \cdot \sup_{x\in\mathbf{R}^m} |\varphi(x)| \leq \|f\|_{L_1(\mathbf{R}^m)} \cdot p_0(\varphi), \tag{4.4a}$$

wobei für $f \in \mathcal{S}$ und $m = 1$

$$\|f\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|x|^2)^{-1}(1+|x|^2)|f(x)|dx \leq \pi\, p_2(f) < \infty. \tag{4.4b}$$

(4.4a) $\quad\Longrightarrow\quad$ ℓ_f ist ein *stetiges* lineares Funktional auf $\mathcal{S}$. Wenn $f \neq g \in \mathcal{S}$ sind, dann gilt $\ell_f \neq \ell_g$ in $\mathcal{S}'$, d.h., wir haben eine kanonische Einbettung

$$\iota : \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m).$$

Man sieht leicht, daß ι stetig ist, wenn wir $\mathcal{S}$ mit der üblichen Fréchet-Topologie und $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ mit der obigen schwach*-Topologie versehen (ÜA).

Man kann zeigen, daß $\iota \circ \mathcal{S}$ sogar dicht in $\mathcal{S}'$ ist bezüglich der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie.

4.5. Beispiel. $L_p(\mathbf{R}^m)$ als Teilmenge von $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$.
Sei $m = 1$. Für $1 \le p \le \infty$ ist die Einbettung $\mathcal{S} \hookrightarrow L_p$ stetig; für $p = 1$ folgt dies aus (4.4b). Für $1 < p < \infty$ gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p}^p &\le \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,|f(x)|^{p-1}dx \le \|f\|_1 \cdot \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|^{p-1} \\ &\le_{(4.4\mathrm{b})} \pi p_2(f)(p_0(f))^{p-1} \\ &\le \pi \cdot p_2(f)^p. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Für $p = \infty$ ist die Aussage klar.
Sei nun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $g \in L_q$ und $\varphi \in \mathcal{S}$; dann gilt nach Hölder

$$\left| \int g(x)\varphi(x)dx \right| \le \|g\|_q \cdot \|\varphi\|_p\,,$$

und wegen (4.5) erzeugt daher die Abbildung

$$\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \int g\varphi dx$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$. Dies definiert eine stetige Einbettung von $L_q \hookrightarrow \mathcal{S}'$. (ÜA)

4.6. Beispiel. Die Dirac-Distribution.
Für $b \in \mathbf{R}$ sei $\delta_b \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ definiert durch

$$\delta_b(\varphi) := \varphi(b), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Man sieht sofort, daß $|\delta_b(\varphi)| \le p_0(\varphi)$.
Bem.: δ_b ist *keine* Funktion sondern ein Maß (Punktmaß). Die Physiker verwenden allerdings gerne die Schreibweise (mit $\delta = \delta_0$)

“$\varphi(b) = \int \varphi(x)\delta(x-b)dx$.”

4.7. Beispiel. (Polynomiell beschränkte Maße.)
Sei ν ein endliches Borel-Maß auf $\mathbf{R}$. Dann ist $\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \int \varphi d\nu$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$, da

$$\left| \int \varphi d\nu \right| \le \|\varphi\|_\infty \cdot \nu(\mathbf{R}) = \nu(\mathbf{R}) \cdot p_0(\varphi).$$

Allgemeiner definiert jedes Maß ν auf $\mathbf{R}$ mit

$$\nu([-R,R]) \le C(1+R^n), \qquad R \ge 0,$$

mit Zahlen $C \ge 0$, $n \in \mathbf{N}$, eine Distribution aus $\mathcal{S}'$.

Im einfachsten Fall besitzt ν eine Dichte g bezgl. des Lebesgue-Maßes, d.h., es gibt eine Funktion $0 \leq g \in L_{1,\mathrm{loc}}$ mit

$$\int_{(-R,R)} g(x)dx \leq C(1 + R^N)$$

und $\nu(a, b) = \int_{(a,b)} g(x)dx$ für alle $-\infty < a < b < \infty$.

4.8. Beispiel. (Ableitung von δ_0). Für $\varphi \in \mathcal{S}$ sei $\delta'(\varphi) := -\varphi'(0)$. Dann ist $\delta' \in \mathcal{S}'$, wird aber nicht durch ein Maß erzeugt. (ÜA)

4.9. Beispiel. (Der Cauchy-sche Hauptwert $\mathcal{P}_{1/x}$; nur für $m = 1$).
Für $f \in \mathcal{S}$ definieren wir

$$\mathcal{P}_{1/x}f := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x} f(x)dx,$$

und nützen aus, daß

$$\int_{|x|>\varepsilon} \frac{1}{x} f(x)dx = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{x} dx,$$

wobei

$$\frac{f(x) - f(-x)}{x} \to 2f'(0), \qquad x \to 0.$$

Man sieht dann leicht, daß $\mathcal{P}_{1/x} \in \mathcal{S}'$ ist. (ÜA).

Bemerkung. Wir werden später (als ÜA) die Formel

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x - x_0 + \mathrm{i}\varepsilon} = \mathcal{P}_{1/(x-x_0)} - \mathrm{i}\pi\delta_{x_0}$$

beweisen (auf der LS Konvergenz in $\mathcal{S}'$ bzgl. der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie), und auch die Fouriertransformierte von $\mathcal{P}_{1/x}$ berechnen.

4.10. Beispiel. Der Raum $\mathcal{O}^m$ besteht aus allen Funktionen $F \in C^\infty(\mathbf{R}^m; \mathbf{C})$, die mitsamt allen ihren Ableitungen polynomiell beschränkt sind, d.h.:

$$\mathcal{O}^m := \{F \in C^\infty(\mathbf{R}^m; \mathbf{C}); \forall \alpha \in \mathbf{N}_0^m \exists C_\alpha \geq 0, N_\alpha \in \mathbf{N} : |D^\alpha F(x)| \leq C_\alpha(1+|x|^2)^{N_\alpha}, x \in \mathbf{R}^m\}.$$

Bemerkung. Diesen Raum können wir zur Zeit noch nicht mit einer Topologie versehen!
$\mathcal{O}^m$ nennt man den *Raum der langsam wachsenden Funktionen.*

Beh. 1: Für $F \in \mathcal{O}^m$ definiert

$$\mathcal{S} \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbf{R}^m} F(x)\varphi(x)dx$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$.

Beweis. Zu F gibt es $C \geq 0$ und $N \in \mathbf{N}$ mit

$$|F(x)| \leq C(1+|x|^2)^N, \qquad x \in \mathbf{R}^m.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\left| \int F\varphi dx \right| &\leq \int |F| \cdot |\varphi| dx \\
&\leq C \int (1+|x|^2)^N \cdot (1+|x|^2)^{-N-m-1} \left((1+|x|^2)^{N+m+1} |\varphi(x)| \right) dx \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \left((1+|x|^2)^{N+m+1} |\varphi(x)| \right) \cdot \int_{\mathbf{R}^m} (1+|x|^2)^{-m-1} dx \\
&\leq p_{2N+2m+2}(\varphi) \cdot c_m \int_0^\infty \frac{r^{m-1}}{(1+r^2)^{m+1}} dr \\
&= \tilde{C} p_{2N+2m+2}(\varphi).
\end{aligned}$$

Beh. 2: Sei $F \in \mathcal{O}^m$, und M_F die Multiplikation mit der Funktion F,

$$M_F \varphi := F\varphi, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Dann ist $M_F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ linear und stetig.

Beweis. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ und $\beta \in \mathbf{N}_0^m$ gilt nach Leibniz

$$D^\beta (F\varphi) = \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} (D^\gamma F)(D^{\beta-\gamma}\varphi),$$

wobei

$$\binom{\beta}{\gamma} := \prod_{j=1}^m \binom{\beta_j}{\gamma_j};$$

$\gamma \leq \beta$ meint dabei $\gamma_j \leq \beta_j$, für $j = 1, \ldots, m$. Wegen $F \in \mathcal{O}^m$ gibt es zu $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^m$ Konstanten $C \geq 0$ und $N \in \mathbf{N}$ mit

$$|x^\alpha D^\gamma F(x)| \leq C(1+|x|^2)^N, \qquad x \in \mathbf{R}^m, \quad \gamma \leq \beta,$$

und es folgt

$$\begin{aligned}
\varrho_{\alpha,\beta}(F\varphi) &= \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \left| x^\alpha D^\beta (F\varphi) \right| \\
&\leq C \cdot \sum_{\gamma \leq \beta} \binom{\beta}{\gamma} \sup_{x \in \mathbf{R}^m} \left| (1+|x|^2)^N D^{\beta-\gamma}\varphi(x) \right| \\
&\leq \tilde{c} p_{2N+|\beta|}(\varphi),
\end{aligned}$$

da die Familie $(p_k)_{k\in\mathbf{N}_0}$ von Halbnormen gerichtet ist. Es folgt $M_F\varphi \in \mathcal{S}$, für alle $\varphi \in \mathcal{S}$. Die obige Abschätzung zeigt außerdem, daß es zu jeder Halbnorm $\varrho_{\alpha,\beta}$ eine Halbnorm p_k gibt mit

$$\varrho_{\alpha,\beta}(F\varphi) \le c \cdot p_k(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

was die Stetigkeit von $M_F\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ beweist. ∎

Wir wollen nun nach einer Möglichkeit suchen, die Multiplikation $M_F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig zu einer Abbildung von $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ fortzusetzen. Dabei denken wir natürlich an die zu M_F adjungierte Abbildung. Das allgemeine Vorgehen bei solchen Fortsetzungen sieht folgendermaßen aus:

4.11. Definition und Satz. Sei $R : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig und linear. Dann definieren wir *den zu R adjungierten Operator $R' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$* durch *"Transposition"* vermöge

$$\mathcal{S}' \ni \ell \mapsto R'(\ell) \in \mathcal{S}'$$
$$[R'(\ell)](\varphi) := \ell(R(\varphi)), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Dann ist $R'(\ell) = \ell \circ R \in \mathcal{S}'$ für alle $\ell \in \mathcal{S}$. Weiter ist $R' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ linear und stetig.

Beweis. Wegen $R\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ linear und stetig und $\ell \in \mathcal{S}'$ ist $\ell \circ R \in \mathcal{S}'$.
• R' linear ist klar.
• R' stetig: Sei $(\ell_\alpha)_{\alpha\in A} \subset \mathcal{S}'$ ein Netz, das in der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie gegen ein $\ell \in \mathcal{S}'$ konvergiert. Für bel. $\varphi \in \mathcal{S}$ folgt

$$[R'(\ell_\alpha)](\varphi) = \ell_\alpha(R\varphi) \to \ell(R\varphi) = [R'(\ell)](\varphi),$$

d.h., $R'(\ell_\alpha) \to R'(\ell)$ in $\mathcal{S}'$ mit der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie. ∎

Sei nun ein stetiger Operator $Q : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ gegeben, den wir nach Möglichkeit zu einem stetigen Operator $\tilde{Q} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ fortsetzen wollen. Sei wieder $\iota : \mathcal{S} \to \mathcal{S}'$ die kanonische Einbettung von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}'$. Die Abb. ι ist stetig, wenn wir $\mathcal{S}$ mit der üblichen Fréchet-Topologie und $\mathcal{S}'$ mit der üblichen schwachen Topologie (d.h., der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie) versehen. Die Suche nach einer Fortsetzung $\tilde{Q}$ von Q bedeutet, daß $\tilde{Q} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ stetig sein soll und der Relation

$$\tilde{Q} \circ \iota = \iota \circ Q \tag{4.6}$$

auf $\mathcal{S}$ genügen muß. Natürlich können wir zu gegebenem Q stets den adjungierten Operator Q' bilden, jedoch wird Q' i.a. der Relation (4.6) nicht genügen. Daher *suchen wir* zu gegebenem $Q : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, Q linear und stetig, nach einem $R : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, R linear und stetig, mit der Eigenschaft, daß

$$R' \circ \iota = \iota \circ Q,$$

und verwenden dann $R' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ als die gesuchte Fortsetzung $\tilde{Q}$ von $\iota \circ Q$.
Dies werden wir für viele lineare Operatoren durchführen, etwa für die (partiellen) Ableitungen, Multiplikation mit Funktionen aus $\mathcal{O}^m$, Koordinatentrafos, aber auch und vor allem für die Fouriertransformation.

Bemerkungen.
(1) Wegen $\iota(\mathcal{S})$ dicht in $\mathcal{S}'$ in der $\sigma(\mathcal{S}', \mathcal{S})$-Topologie ist die obige Fortsetzung jedenfalls *eindeutig bestimmt*, falls sie überhaupt existiert.
(2) Man kann einfache Beispiele konstruieren, wo $Q : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ linear und stetig ist, aber keine Fortsetzung zu einer stetigen linearen Abb. $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ existiert. (ÜA).
(3) In allen konkreten Fällen muß man das richtige R erraten oder ausrechnen: Zu Q suche man $R : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig so, daß

$$\int Q\varphi \cdot \psi = \int \varphi R\psi, \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{S}. \tag{4.7}$$

Natürlich gilt stets $\int Q\varphi \cdot \psi = [(Q' \circ \iota)(\psi)](\varphi)$ für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$, mit $Q' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ stetig, denn:

$$\int (Q\varphi)\psi = \ell_\psi(Q\varphi) = [Q'(\ell_\psi)](\varphi) = [(Q' \circ \iota)\psi] = [(Q' \circ \iota)\psi](\varphi).$$

Man muß sich dann aber mit der Frage auseinandersetzen, ob $Q' \circ \iota$ stetig von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ ist. M.a.W.: *Falls* das Bild von $Q' \circ \iota$ eine Teilmenge von $\mathcal{S}$ ist und $Q' \circ \iota: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig ist, wählt man als $\tilde{Q}$ die Adjungierte zu $Q' \circ \iota$.

4.12. Beispiel. Als erstes und einfachstes Beispiel betrachten wir die Multiplikation mit einer festen Funktion $F \in \mathcal{O}^m$; hier haben wir in Beispiel 4.10 gesehen, daß $M_F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig ist. Es ist klar, daß hier als R nur M_F selbst in Frage kommt (warum???). Sei $M_F' : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ die zu M_F adjungierte Abbildung. Dann gilt

$$M_F' \circ \iota = \iota \circ M_F, \tag{4.7}$$

d.h., M_F' setzt M_F stetig auf $\mathcal{S}'$ fort.

Beweis. Stetigkeit ist schon allgemein gezeigt. Nach Definition der Adjungierten gilt

$$(M_F'\ell)(\varphi) = \ell(M_F\varphi), \qquad \ell \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S};$$

für $f \in \mathcal{S}$ und die zugehörige Distribution $\ell_f = \iota(f) \in \mathcal{S}'$ bedeutet dies

$$\begin{aligned}
[(M_F' \circ \iota)(f)](\varphi) &= [M_F'(\iota(f))](\varphi) = [M_F'(\ell_f)](\varphi) \\
&=_{(\text{Def. von } M_F')} \ell_f(M_F\varphi) = \int f M_F \varphi = \int f F \varphi \\
&= \int (M_F f)\varphi = \ell_{M_F f}(\varphi) = [\iota(M_F f)](\varphi) = [(\iota \circ M_F)(f)](\varphi).
\end{aligned}$$

∎

Bemerkung zur Notation. In der Distributionstheorie verwendet man meist T als generische Bezeichnung für eine Distribution. Das werden wir von nun auch so handhaben.

Wir betrachten als nächstes die *Operation der Ableitung* D^α:

4.13. Theorem. *Für $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ ist $D^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ linear und stetig. Weiter läßt sich D^α zu einer linearen, stetigen Abb. $D^\alpha : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ fortsetzen vermöge*

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}, \quad T \in \mathcal{S}'. \tag{4.8}$$

Beweis. Man sieht leicht, daß $D^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig und linear ist. Für die Stetigkeit beachte man, daß offensichtlich $p_k(D^\beta \varphi) \leq p_{k+|\beta|}(\varphi)$ gilt für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ und alle $\beta \in \mathbf{N}_0^m$.
Wegen Gl. (4.8) ist $D^\alpha : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ gerade der adjungierte Operator zu $(-1)^{|\alpha|} D^\alpha : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$.
$\Longrightarrow \quad D^\alpha : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ stetig. Partielle Integration beweist die Fortsetzungseigenschaft, denn für $f \in \mathcal{S}$ und $T := \ell_f$ gilt

$$\begin{aligned}
(D^\alpha \ell_f)(\varphi) &= (-1)^{|\alpha|} \ell_f(D^\alpha \varphi) \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \\
&= \int D^\alpha f(x) \varphi(x) dx \\
&= \ell_{D^\alpha f}(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S}.
\end{aligned}$$

∎

Bemerkung. Analog zeigt man, daß für alle $f \in \mathcal{O}^m$ gilt: $D^\alpha \ell_f = \ell_{D^\alpha f}$.

4.14. Beispiel. Sei $g(x) := x$, für $x \geq 0$, und $g(x) = 0$, für $x < 0$. Dann ist g zwar stetig, im Nullpunkt aber nicht klassisch differenzierbar.
Für $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt

$$\left| \int g(x) \varphi(x) dx \right| \leq \|x\varphi\|_{L_1} \leq \max_{x \in \mathbf{R}} \left| x(1+|x|^2)\varphi(x) \right| \cdot \int (1+|x|^2)^{-1} dx \leq C \cdot p_3(\varphi).$$

$\Longrightarrow \quad g$ erzeugt eine Distribution $\ell_g \in \mathcal{S}'$.
Wir berechnen nun die Distributionsableitung von g (genauer: von ℓ_g):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{dx}\ell_g\right)(\varphi) = -\ell_g\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) &= -\int_0^\infty x\varphi'(x)dx \\
&= \int_0^\infty \varphi(x)dx = \ell_H(\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S},
\end{aligned}$$

wobei

$$H(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

die *Heaviside-Funktion* bezeichnet. H ist im Nullpunkt unstetig. Die Distributionsableitung von H berechnet sich zu

$$\left(\frac{d}{dx}\ell_H\right)(\varphi) = -\ell_H(\frac{d\varphi}{dx}) = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = \varphi(0),$$

d.h., $\frac{d}{dx}H = \delta$.

Bemerkung. Die Distributionsableitung einer *Funktion* $f \in L_p$ stimmt in jeder offenen Menge $U \in \mathbf{R}^m$, wo f stetig diffbar ist, mit der klassischen Ableitung von f überein. Genauer gilt:
Sei $T \in \mathcal{S}'$, und sei $U \subset \mathbf{R}^m$ offen. Es gebe ein $f \in C^k(U)$ mit

$$T(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)dx, \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(U). \tag{4.9}$$

Dann gilt für alle $|\alpha| \leq k$

$$(D^\alpha T)(\varphi) = \int (D^\alpha f(x))\varphi(x)dx, \qquad \forall\varphi \in C_c^\infty(U).$$

Denn: Für $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ist

$$(D^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^\alpha\varphi) =_{(4.9)} (-1)^{|\alpha|}\int fD^\alpha\varphi = \int (D^\alpha f)(x)\varphi(x)dx,$$

mit partieller Integration im letzten Schritt. (+ Diskussion der obigen Beispiele im Hinblick auf diese Bemerkung.)

Die Distrib.-Ableitung von δ schließlich ist δ'. Wir sehen also, daß das Punktmaß δ die 2. Ableitung (im Sinne von $\mathcal{S}'$) einer stetigen Funktion ist. Allgemein gilt der folgende Struktursatz, den wir in Par. 5 beweisen werden:

4.15. Theorem. *Zu jedem $T \in \mathcal{S}'$ gibt es eine polynomiell beschränkte stetige Fkt. g und ein $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ mit*

$$T = D^\alpha \ell_g \qquad \text{in } \mathcal{S}',$$

d.h.,

$$T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\int g(x)D^\alpha\varphi(x)dx, \qquad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Bemerkung. Die Distributionstheorie erlaubt es also, bel. Ableitungen von Funktionen zu bilden, aber das ist dann auch schon alles!

Weitere Operationen auf $\mathcal{S}'$:

Translationen: Für festes $a \in \mathbf{R}^m$ ist die lineare Abb.

$$U_a f(x) := f(x-a), \qquad f \in \mathcal{S}$$

stetig von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$, und

$$(U_a T)(\varphi) := T(U_{-a}\varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{S},$$

liefert stetige Forts. auf $\mathcal{S}'$.

Lineare Koordinatentrafo: Sei $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ linear und regulär, d.h., $\det A \neq 0$. Dann ist

$$(V_A f)(x) := f(A^{-1}x), \qquad f \in \mathcal{S},$$

lin. und stetig von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$. Die stetige Forts. auf $\mathcal{S}'$ wird gegeben durch

$$(V_A T)(\varphi) = |\det A|\, T(V_{A^{-1}}\varphi), \quad T \in \mathcal{S}', \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Schließlich erläutern wir noch, wie man den *Träger* einer Distribution definiert:
Sei $G \subset \mathbf{R}^m$ offen. Wir sagen, die Distribution T *verschwindet auf* G, wenn $T(\varphi) = 0$ ist für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ mit $\mathrm{supp}\varphi \subset G$.

4.17. Satz. *Sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ und sei $(G_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie offener Teilmengen von $\mathbf{R}^m$ mit der Eigenschaft, daß T auf jedem der G_α verschwindet.*
Dann verschwindet T auch auf $\Omega := \cup_{\alpha\in A} G_\alpha$.

Beweis: Vgl. zB [Rudin]. Zerlegung der Eins; C_c^∞ ist dicht in $\mathcal{S}$.

Daher gibt es eine *größte* offene Teilmenge von $\mathbf{R}^m$, auf der T verschwindet. Wir definieren nun

4.18. Definition. Sei $T \in \mathcal{S}'$ und sei Ω die Vereinigung aller offenen Teilmengen $G \subset \mathbf{R}^m$ mit der Eigenschaft, daß T auf G verschwindet. Dann heißt

$$\mathrm{supp} T := \mathbf{R}^m \setminus \Omega$$

der *Träger der Distribution T*.

4.19. Theorem. *Sei $T \in \mathcal{S}'$ mit* $\mathrm{supp}T = \{0\}$. *Dann gibt es ein $N \in \mathbf{N}$ und Zahlen $a_\alpha \in \mathbf{C}$, für $|\alpha| \leq N$, mit*

$$T = \sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \delta_0^{(\alpha)},$$

wobei $\delta_0^{(\alpha)} = D^\alpha \delta_0$ die Distributionsableitung der Ordnung α der Dirac-Distribution δ_0 bezeichnet.
Bew.: [Rudin]