¶3. Fréchet-Räume.

In lokalkonvexen Räume, die zugleich vollständige metrische Räume sind, gilt der BAIREsche Kategoriesatz. Dies zieht eine Reihe angenehmer und nützlicher Eigenschaften nach sich.

3.1. Definition. (vgl. Def. 2.16)
Ein vollständiger, metrisierbarer lokalkonvexer Raum heißt *FRÉCHET-Raum.*

Ein besonders wichtiges Beispiel ist der *SCHWARTZ-Raum* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$, der für $m = 1$ wie folgt definiert wird:

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbf{R};\mathbf{C})\,;\ \sup_{x\in\mathbf{R}} (1+|x|)^k \left|\varphi^{(j)}(x)\right| < \infty, \quad \forall j,k \in \mathbf{N}_0 \right\}.$$

Versehen mit der Familie von Halbnormen

$$p_{k,j}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbf{R}} (1+|x|)^k \left|\varphi^{(j)}(x)\right|, \qquad k,j \in \mathbf{N}_0,$$

heißt er der *Raum der rasch abfallenden Funktionen* oder der *Schwartz-Raum.*

3.2. Theorem. *Sei $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum. Dann sind äquivalent:*
(a) *$(X,\mathcal{T})$ metrisierbar;*
(b) *es gibt eine abzählbare Nullumgebungsbasis;*
(c) *die Topologie $\mathcal{T}$ von X wird von einer* abzählbaren *Familie von Halbnormen erzeugt.*

Beweis. Wir zeigen $(a) \implies (b) \implies (c) \implies (a)$.
In einem metrischen Raum besitzt jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis. Damit ist die Implikation $(a) \implies (b)$ klar.
“$(b) \implies (c)$”: Sei $\mathcal{B}$ eine abzählbare Nullumgebungsbasis. Da X lokalkonvex, gibt es zu jedem $B \in \mathcal{B}$ ein offenes $U \subset B$ mit $0 \in U$ und U konvex, kreisförmig und absorbierend.
$\implies$ Es gibt eine abzählbare Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$, die aus konvexen, kreisförmigen, absorbierenden Mengen besteht. Die Minkowski-Funktionale zu den $U \in \mathcal{U}$ leisten dann das Gewünschte.
“$(c) \implies (a)$”: (Vgl. ÜA 2.4) Sei $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge von Halbnormen, die die Topologie $\mathcal{T}$ von X erzeugt. Dann ist

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}, \qquad x,y \in X, \tag{3.1}$$

eine Metrik auf X. Die Metrik d ist translationsinvariant und erzeugt dieselbe Topologie wie die Familie $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$. ∎

3.3. Bemerkung. Sei X ein lokalkonvexer Raum, dessen Topologie von einer abzählbaren Familie $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von Halbnormen erzeugt wird. Sei d eine zugehörige Metrik, zB wie in Gl. (3.1). Dann gilt:

X vollständig (als lokalkonvexer Raum) $\iff$ X vollständig als metrischer Raum. (Vgl. ÜA 4.1)

In Fréchet-Räumen gilt der Bairesche Kategorie-Satz.

3.4. Theorem. (Baire-Hausdorff)
Sei $X \neq \emptyset$ ein vollständiger metrischer Raum, und seien $M_i \subset X$, $i \in \mathbf{N}$, Teilmengen von X mit

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i.$$

Dann gibt es ein $i_0 \in \mathbf{N}$ so, daß die Menge $\overline{M}_{i_0}$ innere Punkte besitzt.

Beweise finden sich in jedem Buch über FA.

Die erste wichtige Folgerung ist das Prinzip von der gleichmäßigen Beschränktheit (uniform boundedness principle, UBP):

3.5. Theorem. *Seien X, Y Fréchet-Räume und sei $(L_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie stetiger linearer Abbildungen von X nach Y. Für jedes $x \in X$ sei die Menge der Bilder $\{L_\alpha x\,;\, \alpha \in A\}$ eine beschränkte Teilmenge von Y (d.h., für jede stetige Halbnorm q auf Y sei $\{q(L_\alpha x); \alpha \in A\} \subset [0,\infty)$ beschränkt; vgl. ÜA 3.3).*
Dann gibt es zu jeder stetigen Halbnorm q auf Y eine stetige Halbnorm p auf X und eine Konstante $C > 0$ so, daß

$$q(L_\alpha x) \leq C p(x), \qquad \forall x \in X, \quad \forall \alpha \in A.$$

Bem.: Die Konstante C könnte man in der Halbnorm p verschwinden lassen.

Anwendungen:

3.6. Korollar. *Seien X, Y Fréchet-Räume und sei $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge stetiger linearer Abb. von X nach Y. Wenn*

$$Lx := \lim_{n \to \infty} L_n x$$

für alle $x \in X$ existiert, dann ist auch L ein stetiger linearer Operator.

Beweis. Sei q eine stetige Halbnorm auf Y. Wegen $L_n x \to Lx$ gilt $q(L_n x - Lx) \to 0$. Aus

$$q(L_n x) \leq q(Lx) + q(L_n x - Lx).$$

folgt daher, daß $\{L_n x\,;\, n \in \mathbf{N}\}$ eine beschränkte Teilmenge von Y ist, für alle $x \in X$. Nach dem UBP gibt es daher zu jeder stetigen Halbnorm q auf Y eine stetige Halbnorm p auf X und ein $C > 0$ mit

$$q(L_n x) \leq C p(x), \qquad x \in X, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Wegen q stetig und $L_n x \to Lx$, $n \to \infty$, folgt auch

$$q(Lx) \le Cp(x), \qquad x \in X.$$

Daher erfüllt L die Bedingung aus Thm. 2.14 und L ist stetig. ∎

3.7. Definition. Sei X ein lokalkonvexer Raum mit einer abzählbaren Familie von Halbnormen $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$. Die Familie $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ heißt *gerichtet* oder *filtriert*, wenn aus $j \le k$ stets $p_j(x) \le p_k(x)$, für alle $x \in X$, folgt.

Bemerkungen. (a) Man sieht leicht, daß man in einem Fréchet-Raum stets zu einem äquivalenten filtrierten System von Halbnormen übergehen kann (vgl. Def. 2.12 für die Äquivalenz von Familien von Halbnormen). Gegeben eine beliebige (abzählbare) Familie (p_n) von stetigen Halbnormen, definiere einfach

$$P_n(x) := p_1(x) + \ldots + p_n(x), \qquad n \in \mathbf{N}, \quad x \in X.$$

Die Familie $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist gerichtet und äquivalent zur Familie $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
(b) Wenn man im Urbild- und im Bildraum jeweils ein filtriertes System von Halbnormen verwenden kann, drückt sich die Stetigkeit linearer Operatoren besonders einfach aus.
(c) Die Familien $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(q_\beta)_{\beta\in B}$ sind genau dann äquivalent, wenn die identische Abbildung $I : X \to X$ ein Homöomorphismus zwischen $(X, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ und $(X, (q_\beta)_{\beta\in B})$ ist. (ÜA)

3.8. Korollar. *Seien X, Y Fréchet-Räume und sei*

$$B : X \times Y \to \mathbf{C}$$

ein bilineares Funktional, das in jeder der beiden Variablen separat stetig ist.
Dann ist $B(.,.)$ in beiden Variablen zugleich stetig. Genauer gibt es stetige Halbnormen p auf X, q auf Y und eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$|B(x,y)| \le Cp(x)\, q(y), \qquad \forall x \in X, \quad y \in Y. \tag{3.2}$$

Beweis.
(1) Wir zeigen zunächst: Wenn $(x_n) \subset X$ und $(y_n) \subset Y$ Nullfolgen sind, so gilt

$$B(x_n, y_n) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Dazu definieren wir lineare Funktionale $T_n : Y \to \mathbf{C}$ durch

$$T_n(y) := B(x_n, y), \qquad y \in Y.$$

T_n ist ein stetiges lineares Funktional, da, nach Vorauss., $B(x_n, .)$ stetig.
Aus $x_n \to 0$ und $B(., y): X \to \mathbf{C}$ stetig folgt, daß für jedes feste $y \in Y$ die Menge $\{T_n(y)\,;\, n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{C}$ beschränkt ist.
Nach dem UBP gibt es daher eine stetige Halbnorm q auf Y und ein $C > 0$ mit

$$|T_n(y)| \le Cq(y), \qquad y \in Y, \quad n \in \mathbf{N}.$$

$\Longrightarrow$

$$|B(x_n, y_n)| = |T_n(y_n)| \le Cq(y_n) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

da $y_n \to 0$. Da X metrischer Raum folgt sofort die Stetigkeit von $B(.,.)$ in beiden Argumenten zugleich.
(2) Wir zeigen jetzt (3.2): Die Annahme, (3.2) wäre falsch, impliziert, daß es zu jedem Paar stetiger Halbnormen p auf X und q auf Y und jedem $n \in \mathbf{N}$ Punkte $x \in X$ und $y \in Y$ gibt mit

$$|B(x, y)| > np(x)\, q(y) > 0.$$

Sei $(p_k)_{k \in \mathbf{N}}$ eine *gerichtete* Familie stetiger Halbnormen, die die Topologie von X erzeugt (d.h., $p_k(x) \le p_{k+1}(x)$, $\forall x \in X$). Analog $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ für Y.
Nach obiger Folgerung aus der Widerspruchsannahme gibt es zu jedem $n \in \mathbf{N}$ ein $x_n \in X$ und ein $y_n \in Y$ mit

$$|B(x_n, y_n)| > np_n(x_n)q_n(y_n).$$

Für

$$x'_n := \frac{1}{\sqrt{n}p_n(x_n)}x_n, \qquad y'_n := \frac{1}{\sqrt{n}q_n(y_n)}y_n,$$

gilt dann

$$|B(x'_n, y'_n)| > 1, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{$*$}$$

Andrerseits gilt $x'_n \to 0$: Denn für jedes p_m, $m \in \mathbf{N}$, gilt für $n \ge m$

$$p_m(x'_n) \le p_n(x'_n) = p_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}p_n(x_n)}x_n\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Analog $y'_n \to 0$, also, nach Teil (1), $B(x_n, y_n) \to 0$, im Widerspruch zu (1). ∎

3.9. Korollar. *Sei X Fréchet-Raum, X^* der VR der stetigen linearen Funktionale $X \to$ $\mathbf{C}$. Wir statten X^* mit der $\sigma(X^*, X)$-Topologie aus, also der schwach*-Topologie.*
Sei $(f_n) \subset X^*$ eine Folge, die in X^* gegen ein $f \in X^*$ konvergiert (d.h., für alle $x \in X$ gilt $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$).
Dann gilt für jedes kompakte *$K \subset X$:*

$$f_n(x) \to f(x), \quad n \to \infty, \quad \text{gleichmäßig für } x \in K.$$

Beweis. Für jedes feste $x \in X$ ist $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ konvergent, also ist $\{f_n(x)\,;\, n \in \mathbf{N}\} \subset \mathbf{C}$ beschränkt. Nach dem UBP gibt es daher eine stetige Halbnorm p auf X und ein $C > 0$ mit

$$|f_n(x)| \le Cp(x), \qquad x \in X, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{3.3}$$

Sei nun $K \subset X$ kompakt und sei $\varepsilon > 0$. Zu $x \in K$ ist

$$U_x := \{y \in X\,;\, p(x-y) < \varepsilon/3C\}$$

eine offene Umgebung. Aus der Kompaktheit von K und

$$K \subset \cup_{x\in D} U_x$$

folgt, daß bereits *endlich viele* der U_x die Menge K überdecken, d.h., es gibt $x_1, \ldots, x_m \in K$ mit

$$K \subset \cup_{k=1}^m U_{x_k}.$$

Sei nun $N \in \mathbf{N}$ so groß, daß für $n \ge N$

$$|f_n(x_k) - f(x_k)| < \varepsilon/3, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{3.4}$$

Für $x \in U_{x_k}$ ist dann

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\le |f_n(x) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f(x_k)| + |f(x_k) - f(x)| \\ &\le_{(3.4)} |f_n(x - x_k)| + \varepsilon/3 + |f(x - x_k)| \\ &\le_{(3.3)} 2Cp(x - x_k) + \varepsilon/3 < \varepsilon, \end{aligned}$$

für $k \ge k_\varepsilon$; beachte, daß (3.3) auch für f gilt. ∎

Eine weitere wichtige Konsequenz aus dem Baireschen Kategoriesatz ist der Satz von der offenen Abbildung ("Open Mapping Theorem"):

3.10. Theorem. *Seien X und Y Fréchet-Räume, und sei $L\colon X \to Y$ linear, stetig und surjektiv.*
Dann ist L offen, d.h., $L(U)$ ist offen in Y für alle offenen $U \subset X$.

3.11. Korollar. *Seien X und Y Fréchet-Räume, und sei $L\colon X \to Y$ linear, stetig und bijektiv.*
Dann ist die Umkehrabbildung $L^{-1}\colon Y \to X$ stetig.

Bem. Für (nicht notwendig lineare) Abbildungen gilt: Seien S und T kompakte Hausdorff-Räume, $f\colon S \to T$ stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1}\colon T \to S$ stetig und f ein Homöomorphismus. ([RS-I; Thm. IV.4, p. 100])

Mit den üblichen Argumenten folgt aus dem "Open Mapping Theorem" das "Closed Graph Theorem."

3.12. Definition. Seien X und Y Fréchet-Räume, $A\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann heißt

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax)\,;\, x \in X\} \subset X \times Y$$

der *Graph von A.* Der Operator A heißt *abgeschlossen,* wenn sein Graph ein abgeschlossener Unterraum des Fréchet-Raums $X \times Y$ ist.

3.13. Lemma. *Seien X, Y Fréchet-Räume und sei $A\colon X \to Y$ ein linearer Operator. Dann gilt:*
A ist genau dann abgeschlossen, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(x_n) \subset X, \quad x_n \to x, \quad Ax_n \to y \in Y \quad \Longrightarrow \quad Ax = y.$$

Beweis klar, da die Topologie auf $X \times Y$ metrisch ist.

3.14. Theorem. (Satz vom abgeschlossenen Graphen)
Seien X, Y Fréchet-Räume und sei $A\colon X \to Y$ ein linearer Operator.
Dann gilt: A stetig $\iff$ A abgeschlossen.