Kapitel II. Banachräume.

¶3. Normierte Vektorräume.

3.1. Definition. Ein *normierter linearer Raum* (oder: ein *normierter VR* über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$) ist ein Paar $(X, \|.\|)$, bestehend aus einem VR X und einer Funktion

$$\|.\| : X \to \mathbf{R}$$

mit den Eigenschaften:
(*i*) $\forall x \in X : \|x\| \geq 0;$
(*ii*) $\|x\| = 0 \iff x = 0;$
(*iii*) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}, x \in X;$
(*iv*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \qquad \forall x, y \in X.$
Eine Abb. $\|.\| : X \to [0, \infty)$ mit (*i*)—(*iv*) heißt eine *Norm auf* X.

Bemerkung. Die Norm $\|.\|$ induziert auf X eine Metrik vermöge

$$d(x, y) := \|x - y\|, \qquad x, y \in X.$$

Bezüglich dieser Metrik ist die Abb. $\|.\| : X \to \mathbf{R}$ stetig, denn aus $x_n \to x$ in (X, d) folgt

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\| = d(x_n, x) \to 0.$$

Weiterhin sind die linearen Operationen (Vektoraddition und skalare Multiplikation) jeweils stetig.

3.2. Definition. Der normierte VR $(X, \|.\|)$ heißt *vollständig*, wenn der metrische Raum (X, d) (mit der durch $\|.\|$ induzierten Metrik d) vollständig ist. Vollständige normierte Räume nennt man

Banachräume,

abgekürzt BRe.

BRe haben viele Eigenschaften mit $\mathbf{R}^d$ gemeinsam: sie sind VRe, man kann Abstände durch $\|x - y\|$ messen, und Cauchyfolgen besitzen stets einen Limes. I.a. sind aber beschr. und abgeschlossene Teilmengen *nicht* kompakt; die Norm stammt i.a. *nicht* von einem Skalarprodukt her. Banachräume, deren Norm von einem Skalarprodukt stammt, heißen *Hilberträume.*
Wir werden in diesem Kapitel
— Banachräume
— stetige lineare Abbildungen zwischen BRen
— stetige lineare Funktionale auf BRen
studieren.

Kriterium für die Vollständigkeit normierter VRe:

3.3. Satz. *Ein normierter VR $(X, \|.\|)$ ist genau dann vollständig, wenn jede Folge $(x_k) \subset X$ mit*

$$\sum_k \|x_k\| < \infty$$

summierbar ist, d.h., wenn es ein $x \in X$ gibt mit

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \to x, \qquad n \to \infty.$$

Beweis als ÜA.

3.4. Beispiele.

(a) *Hilberträume* sind BRe. Genauer gilt: Ein BR X ist genau dann ein HR, wenn die Norm $\|.\|$ der *Parallelogrammgleichung*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad \forall x, y \in X, \tag{3.1}$$

genügt. Man kann dann auf X ein *Skalarprodukt* $\langle . \, , \, . \rangle$ einführen mit

$$\|f\|^2 = \langle f \, , \, f \rangle, \qquad \forall f \in X.$$

Hilberträume behandeln wir etwas später! Beim Studium der Hilberträume geht man meist umgekehrt von einem Skalarprodukt aus.

(b) *Folgenräume* Es sei stets

$$a := (a_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$$

eine Folge komplexer Zahlen. Dann definiert man den Raum der *beschränkten Folgen*

$$\ell_\infty := \{a \, ; \, \|a\|_\infty := \sup_n |a_n| < \infty\},$$

den Raum der *Nullfolgen*

$$c_0 := \{a \, ; \, \lim_{n \to \infty} a_n = 0\},$$

den Raum der *rasch abfallenden Folgen*

$$s := \{a \, ; \, \forall k \in \mathbf{N} : \lim_{n \to \infty} n^k a_n = 0\}$$

und den Raum der *"abbrechenden" Folgen*

$$f := c_{00} := \{a \, ; \, \exists k \in \mathbf{N}, \forall n > k : a_n = 0\}.$$

Für $1 \le p < \infty$ sei weiter

$$\ell_p := \{a \, ; \, \|a\|_p := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{1/p} < \infty\}$$

• Als Mengen betrachtet gilt offenbar

$$c_{00} \subset s \subset \ell_p \subset \ell_q \subset c_0 \subset \ell_\infty, \qquad 1 \leq p \leq q < \infty.$$

• Die Räume $(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$ und $(c_0, \|.\|_\infty)$ sind BRe. (ÜA)

• Die Räume $(\ell_p, \|.\|_p)$ sind BRe, $1 \leq p < \infty$. Der Beweis ist nicht so einfach wie im vorangehenden Punkt; er verwendet u.a. die *Minkowskische Ungleichung:*

$$\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p\,, \qquad a, b \in \ell_p. \tag{3.2}$$

• ℓ_2 ist ein HR; alle anderen Räume sind keine HRe.

• s ist ein vollständiger metrischer Raum, sogar ein *Fréchet-Raum*, aber kein BR.

• Der Raum f ist für $1 \leq p < \infty$ *dicht in* $(\ell_p, \|.\|_p)$, d.h., zu jedem $a \in \ell_p$ exist. eine Folge $(\varphi_n) \subset f$ mit $\|a - \varphi_n\|_p \to 0$. (ÜA?) f liegt auch dicht in $(c_0, \|.\|_\infty)$.

3.5. Definition. Ein metrischer Raum (M, d) heißt *separabel*, wenn es eine *abzählbare* Teilmenge $D \subset M$ gibt mit $\overline{D} = M$.

3.6. Lemma. *Ein normierter VR X ist genau dann separabel, wenn es eine Folge $(x_n) \subset X$ gibt mit*

(*i*) span $\{x_n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$ *dicht in X;*

(*ii*) *für alle $k \in \mathbf{N}$ sind $x_1, \ldots, x_k$ linear unabhängig.*

Beweis.
"$\Longleftarrow$": Zu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ exist. nach (i) eine endl. Linearkombination

$$y := \sum_{k=1}^{M} \alpha_k x_k,$$

mit einem $M \in \mathbf{N}$ und geeigneten $\alpha_k \in \mathbf{C}$ so, daß $\|x - y\| < \varepsilon$. Zu α_k exist. $\beta_k \in \mathbf{C}$ mit $\operatorname{Re}\beta_k \in \mathbf{Q}$, $\operatorname{Im}\beta_k \in \mathbf{Q}$ und

$$|\alpha_k - \beta_k| < \frac{\varepsilon}{M\,\|x_k\|}.$$

Damit folgt

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{M} \beta_k x_k \right\| < 2\varepsilon.$$

Die Menge aller endlichen Linearkombinationen der x_k mit *rationalen* Koeffizienten ist aber abzählbar, da $\mathbf{Q}$ abzählbar.

"$\Longrightarrow$": Sei X separabel, $(y_n) \subset X$ eine Folge mit $\overline{\{y_n\,;\, n \in \mathbf{N}\}} = X$. Wir erzeugen die gesuchte Folge (x_n) aus der Folge (y_n), indem wir induktiv durch die Folge (y_n) durchgehen und ein Folgenglied y_n streichen, falls $y_n \in \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ gilt. ∎

3.7. Beispiel. ℓ_∞ ist nicht separabel (ÜA). Die Räume ℓ_p, $1 \le p < \infty$, sowie der Raum c_0 sind separabel.

3.8. Beispiel. $L_\infty(\mathbf{R})$ und Teilräume. Wir gehen aus vom VR der beschränkten, Borel-meßbaren Funktionen $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$. Eine Funktion f heißt Borel-meßbar, wenn die Urbilder aller Borel-Mengen wieder Borel sind. Zwei Borel-meßbare Fktn. f und g heißen äquivalent, $f \sim g$, wenn es eine Borel-Nullmenge $N \subset \mathbf{R}$ gibt mit

$$f(x) = g(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R} \setminus N.$$

(Eine Nullmenge wird durch die folgende Eigenschaft definiert: $\forall \varepsilon > 0$ gibt es eine Folge von Intervallen $I_k \subset \mathbf{R}$ mit $\sum_{k=1}^\infty |I_k| < \varepsilon$ und $N \subset \cup_{k=1}^\infty I_k$.)
Man sagt, daß eine Eigenschaft *fast überall* oder *für fast alle* $x \in \mathbf{R}$ gilt, wenn es eine Nullmenge $N \subset \mathbf{R}$ so gibt, daß die Eigenschaft für alle $x \in \mathbf{R} \setminus N$ wahr ist.
Z.B. ist $\mathbf{Q}$ eine Nullmenge in $\mathbf{R}$ und daher liegt die Funktion $\chi_{\mathbf{Q}}$ in der Äquivalenzklasse der Null-Funktion.
Wir definieren weiter

$$\|f\|_\infty := \inf\{m \ge 0\,;\, |f(x)| \le m \text{ fast überall}\}.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen von $\mathbf{C}$-wertigen, meßbaren, (fast überall) beschränkten Funktionen auf $\mathbf{R}$, versehen mit der Norm $\|f\|_\infty$, wird mit $L_\infty(\mathbf{R})$ bezeichnet. Man schreibt auch

$$\operatorname{ess\,sup} f := \|f\|_\infty\,.$$

Das Paar $(L_\infty(\mathbf{R}), \|.\|_\infty)$ ist ein BR; er ist nicht separabel.

• Sei $C_b(\mathbf{R}) := \{f \in C(\mathbf{R})\,;\, f \text{ beschränkt}\} = L_\infty(\mathbf{R}) \cap C(\mathbf{R})$ (dabei gehen wir mit den Äquivalenzklassen etwas lax um).
$(C_b(\mathbf{R}), \|.\|_\infty)$ ist ein BR und zugleich ein echter abgeschlossener Teilraum von $(L_\infty(\mathbf{R}), \|.\|_\infty)$.
Auch $(C_b(\mathbf{R}), \|.\|_\infty)$ ist nicht separabel. (ÜA)
Zu $C_b(\mathbf{R})$ gehören Funktionen wie $\sin x$ und allgemeiner $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ mit bel. $k \in \mathbf{R}$. Daher enthält $C_b(\mathbf{R})$ alle quasi-periodischen Funktionen wie zB $\sin x + \sin \pi x$. Weitere Beispiele sind Funktionen wie $\cos\sqrt{|x|}$ oder $\cos x^2$.

• $C_0(\mathbf{R}) := \{f \in C(\mathbf{R})\,;\, f(x) \to 0, \quad x \to \pm\infty\}$, versehen mit der $\|.\|_\infty$-Norm, ist ein BR und ein echter Teilraum von $C_b(\mathbf{R})$. $C_0(\mathbf{R})$ ist separabel.

• $C_c(\mathbf{R}) := \{f \in C(\mathbf{R})\,;\, \exists k \ge 0\colon |x| > k \Longrightarrow f(x) = 0\}$.
$(C_c(\mathbf{R}), \|.\|_\infty)$ ist ein dichter Teilraum von $(C_0(\mathbf{R}), \|.\|_\infty)$, aber selbst kein Banachraum.

3.9. Beispiele. (L_p-Räume, $1 \le p < \infty$.)
Es sei (M, μ) ein Maßraum, z.B. $M \subset \mathbf{R}^d$ offen und μ das übliche Lebesgue-Maß im $\mathbf{R}^d$. Mit $L_p(M, \mathrm{d}\mu)$ bezeichnen wir die Menge der Äquivalenzklassen von μ-meßbaren Funktionen $f\colon M \to \mathbf{C}$ mit

$$\|f\|_p := \left(\int_M |f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{3.3}$$

(wieder heißen f, g äquivalent, wenn sie punktweise μ-fast überall übereinstimmen).

• Die Ungleichung von *Minkowski* besagt

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p\,, \qquad f, g \in L_p. \tag{3.4}$$

• $(L_p(M, \mathrm{d}\mu), \|.\|_p)$ ist vollständig. (Fischer-Riesz)

• Seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{3.5a}$$

und seien $f \in L_p$, $g \in L_q$. Dann ist $fg \in L_1$ mit

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_q\,. \tag{3.5b}$$

(Höldersche Ungleichung)

• Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ offen und $1 \leq p < \infty$. Dann ist $(C_c(\Omega), \|.\|_p)$ dicht in $(L_p(\Omega, \mathrm{d}x), \|.\|_p)$ und $(L_p(\Omega, \mathrm{d}x), \|.\|_p)$ ist separabel.

Bemerkung. Es sei im folgenden $1 \leq p < \infty$. Es ist $(C_c(\Omega), \|.\|_p)$ ein normierter VR, der nach Thm. 1.10 vervollständigt werden kann. Diese Vervollständigung kann man auch *als Definition* von $(L_p(\Omega), \mathrm{d}x)$ verwenden. Das heißt genauer, daß man sich jedes $f \in (L_p(\Omega), \mathrm{d}x)$ als eine Äquivalenzklasse von Cauchfolgen aus $(C_c(\Omega), \|.\|_p)$ vorstellt. Zusätzlich kann man (nach einem Lemma von Riesz) sicherstellen, daß es zu jedem $f \in L_p(\Omega)$ eine Folge $(\varphi_n) \subset C_c(\Omega)$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(i) (φ_n) ist Cauchyfolge in $(C_c(\Omega), \|.\|_p)$;
(ii) $\varphi_n \to f$ punktweise fast überall.
Man beachte, daß wir es mit zwei völlig verschiedenen Äquivalenzrelationen zu tun haben: in $L_p(\Omega)$ haben wir die Äquivalenz zweier meßbarer Funktionen über die punktweise Gleichheit fast überall definiert, während zwei Cauchyfolgen in $C_c(\Omega)$ äquivalent heißen, wenn ihre Differenz eine Nullfolge in $(L_p(\Omega), \|.\|_p)$ bildet.
Für $L_\infty(\mathbf{R})$ funktioniert diese Methode aber nicht direkt, denn die Vervollständigung von $C_c(\mathbf{R})$ in der $\|.\|_\infty$-Norm ist gerade $C_0(\mathbf{R})$.

Literatur zu den L_p-Räumen: [Adams], [RS-I], [RN], [W], [Elstrodt], [KF], [LL], [Rudin, Real and Complex Analysis], [B. Simon, Functional Analysis, 2016]

Als nächstes betrachten wir lineare Operatoren zwischen Banachräumen:

3.10. Definition. Seien $(X, \|.\|_X)$ und $(Y, \|.\|_Y)$ normierte VRe. Eine lineare Abbildung

$$T\colon X \to Y$$

mit

$$\|Tx\|_Y \leq C\,\|x\|_X\,, \qquad \forall x \in X, \tag{3.6}$$

mit einer (von x unabhänigigen) Konstanten $C \geq 0$ heißt ein *beschränkter Operator.* Die kleinste Zahl $C \geq 0$, für die (3.6) gilt, heißt *die Norm von* T, i.Z. $\|T\|$.

Bemerkungen.
(a) Aus Def. 3.10 folgt sofort die Abschätzung

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \; \|x\|_X \,, \qquad \forall x \in X.$$

(b) Wegen Def. 3.10 gilt

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{\|Tx\|_Y \; ; \; \|x\| = 1\} \\ &= \sup \{\|Tx\|_Y \; ; \; \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \; ; \; 0 \neq x \in X \right\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.11. Satz. (ÜA)
Seien X, Y normierte VRe, $T\colon X \to Y$ sei linear. Dann sind äquivalent:
(a) T ist ein beschränkter Operator;
(b) T ist stetig;
(c) T ist stetig bei 0.

3.12. Satz. ("BLT-Theorem" = "bounded linear transformation" oder "bacon-lettuce-tomato")
Es sei $(X, \|.\|_X)$ ein normierter VR, $(Y, \|.\|_Y)$ sei ein Banachraum. Weiter sei $X_0 \subset X$ ein dichter Teilraum von X. Schließlich sei

$$T_0\colon X_0 \to Y$$

eine beschr. lineare Abb.
Dann kann man T_0 (in eindeutiger Weise) zu einem beschränkten Operator

$$T\colon X \to Y$$

fortsetzen mit $\|T\| = \|T_0\|$.

(Mit "Fortsetzung" ist $T|_{X_0} = T_0$ gemeint.)

Beweis. Da X_0 dicht in X, gibt es zu jedem $x \in X$ eine Folge $(x_n) \subset X_0$ mit $x_n \to x$. Diese Folge erfreut sich dann der Cauchy-Eigenschaft, insbesondere gilt

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbf{N}, \quad \forall n, m \geq N\colon \quad \|x_n - x_m\|_X < \frac{\varepsilon}{1 + \|T_0\|}.$$

Es folgt

$$\|T_0 x_n - T_0 x_m\|_Y \leq \|T_0\| \; \|x_n - x_m\|_X < \varepsilon, \qquad n, m \geq N,$$

d.h., $(T_0 x_n) \subset Y$ ist CF in Y.
Wegen $(Y, \|.\|_Y)$ vollst. gibt es ein $y \in Y$ mit

$$T_0 x_n \to y, \qquad n \to \infty,$$

und wir definieren daher

$$Tx := y. \tag{3.8}$$

Behauptung. Tx ist wohldefiniert, d.h., unabhängig von der Wahl der Folge (x_n) mit $x_n \to x$.
Beweis der Beh.: Sei auch $(x'_n) \subset X_0$ mit $x'_n \to x$. Dann gilt $x_n - x'_n \to 0$, $n \to \infty$. Nach obigem existiert ein $y' \in Y$ mit $T_0 x'_n \to y'$. Aus $x_n - x'_n \to 0$ und T_0 beschränkt folgt aber

$$\|T_0 x_n - T_0 x'_n\|_Y \le \|T_0\| \, \|x_n - x'_n\|_X \to 0, \qquad n \to \infty,$$

also

$$T_0 x_n - T_0 x'_n \to 0 \text{ in } Y, \qquad n \to \infty,$$

oder $y' = y$.
Weiter gilt

$$\begin{aligned} \|Tx\|_Y &= \|y\|_Y = \left\| \lim_n T_0 x_n \right\|_Y \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T_0 x_n\|_Y \qquad\qquad (\text{da } \|.\| \text{ stetig}) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \|T_0\| \cdot \|x_n\|_X \\ &= \|T_0\| \cdot \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_X \\ &= \|T_0\| \cdot \|x\|_X \,. \end{aligned}$$

Damit folgt $\|T\| \le \|T_0\|$. Trivialerweise gilt $\|T\| \ge \|T_0\|$.
Man sieht leicht, daß T wieder linear ist. ∎

Bemerkung.
Analoge Aussage gilt für den Fall eines normierten VR X und seiner Vervollständigung $\tilde{X}$. Sei Y ein BR. Ein stetiger linearer Operator $T\colon X \to Y$ läßt sich zu einem stetigen linearen Operator $\tilde{T}\colon \tilde{X} \to Y$ fortsetzen unter Erhaltung der Norm. Eine genaue Formulierung verwendet dabei die isometrische Einbettung $J\colon X \to \tilde{X}$ aus Thm. 1.10.

3.13. Definition. Seien $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normierte VRe. Die Menge der beschränkten linearen Operatoren $T\colon X \to Y$ bezeichnen wir mit $\mathcal{B}(X, Y)$.

3.14. Satz. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter VR, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein BR. Dann ist $\mathcal{B}(X, Y)$, versehen mit der Norm aus Def. 3.10, ein Banachraum.*

Beweis.
(a) Es ist klar, daß $(\mathcal{B}(X, Y), \|\cdot\|)$ ein normierter VR ist (Dreiecksungl. verlangt kurzen Beweis!).

(b) *Vollständigkeit:* Sei $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{B}(X,Y),\|\cdot\|)$, d.h.,

$$\|T_n - T_m\| \to 0, \qquad n,m \to \infty.$$

Für jedes $x \in X$ ist dann $(T_n x)_{n\in\mathbf{N}}$ C-Folge in Y.
Y vollst. $\implies$ $\exists y = y_x \in Y : T_n x \to y$.
Wir definieren einen Operator $T : X \to Y$ durch

$$Tx := \lim T_n x = y, \qquad x \in X,$$

und zeigen $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ sowie $\|T - T_n\| \to 0$.

(i) T linear: klar.

(ii) T beschr.: Nach der Dreiecksungleichung gilt $\|T_n\| \le \|T_n - T_m\| + \|T_m\|$, also

$$|\,\|T_n\| - \|T_m\|\,| \le \|T_n - T_m\|\,.$$

Wegen (T_n) C-Folge ist daher $(\|T_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ reelle C-Folge, also beschränkt. Sei

$$C := \sup_n \|T_n\|\,.$$

Für $x \in X$ folgt

$$\|Tx\|_Y = \|\lim T_n x\|_Y = \lim \|T_n x\|_Y \le \limsup \|T_n\|\;\|x\|_X \le C\,\|x\|_X\,.$$

$\Rightarrow \quad T \in \mathcal{B}(X,Y)$.

(iii) Wir zeigen noch $\|T_n - T\| \to 0$:
Zu $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbf{N}$ mit $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$, für alle $n,m \ge N$. $\implies$

$$\begin{aligned}
\|(T_n - T)x\|_Y &= \left\|T_n x - \lim_m T_m x\right\|_Y \\
&= \lim_{m\to\infty} \|(T_n - T_m)x\|_Y \\
&\le \limsup_m \|T_n - T_m\|\;\|x\|_X \\
&\le \varepsilon\,\|x\|_X\,, \qquad x \in X, \quad n \ge N.
\end{aligned}$$

Damit folgt nun auch sofort $\|T\| = \lim \|T_n\|$. ∎

Bemerkung. Es seien X, Y, Z normierte Vektorräume und $T\colon X \to Y$, $S\colon Y \to Z$ beschränkte Operatoren. Dann gilt

$$\|S \circ T\| \le \|S\|\;\|T\|\,.$$

Wenn in Satz 3.14 zusätzlich $X = Y$ gilt, so ist $\mathcal{B}(X,X)$, versehen mit der Verknüpfung $\circ$ zwischen den Operatoren, eine *Banachalgebra mit Eins.*

3.15. Definition. Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ eine stetige lineare Abbildung.
(a) T heißt *Isometrie*, falls $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$, für alle $x \in X$.
(b) T heißt *topologischer Isomorphismus*, wenn T bijektiv ist.
(c) T heißt *(isometrischer) Isomorphismus*, wenn T bijektiv und isometrisch ist.

Bem.:
(0) Die Definitionen 3.15, (a) und (c), sind auch für normierte Vektorräume X, Y sinnvoll.
(1) Isometrien sind injektiv, müssen aber nicht surjektiv sein.
(2) Wenn $T : X \to Y$ topolog. Isomorphismus zwischen den Banachräumen X und Y, so ist auch T^{-1} stetig. Dies wird eine Konsequenz aus dem Satz von der offenen Abb. im nächsten Paragraphen sein.

3.16. Definition. Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf dem VR X heißen *äquivalent*, wenn es (positive) Konstanten $0 < C \leq C'$ gibt mit

$$C \, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C' \, \|x\|_1 , \qquad x \in X.$$

Bemerkungen: (*a*) Auf $\mathbf{R}^d$ sind alle Normen äquivalent; ebenso auf $\mathbf{C}^d$ und generell auf endlich-dimensionalen VRen.
(*b*) Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf dem VR X sind genau dann äquivalent, wenn die identische Abbildung $I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ ein topol. Isomorphismus ist.

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei "Rezepten" zur Herstellung von Banachräumen:

3.17 Weitere Beispiele von Banachräumen.
(a) Kartesisches Produkt von Banachräumen: Seien $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ normierte VRe. Auf $X \times Y$ können wir verschiedene Normen einführen, zB die kanonische Norm

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y , \qquad x \in X, \quad y \in Y.$$

Dann ist $(X \times Y, \|.\|_{X \times Y})$ ein normierter VR, und sogar ein BR, sofern X und Y vollständig sind. Eine äquivalente Norm wird zB durch

$$\|(x, y)\|_{X \times Y, 2} := \left(\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2 \right)^{1/2} , \qquad x \in X, \quad y \in Y,$$

die im Falle von Hilberträumen wieder einen Hilbertraum liefert.
(b) *Quotientenräume.*
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein BR und $M \subset X$ ein *abgeschlossener* Teilraum. Wir definieren auf X eine Äquivalenzrelation $\sim$ durch

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow x - y \in M.$$

Die Menge der Äquivalenzklassen in X bezgl. $\sim$ bezeichnet man mit X/M. X/M ist ein VR, auf dem eine Norm definiert werden kann durch

$$\|[x]\|_{X/M} := \inf\{\|y\|_X \,; y \in [x]\}.$$

Dann ist $(X/M, \|\cdot\|_{X/M})$ ein Banachraum. (ÜA)

Dualräume von BRen.

Nach Satz 3.14 ist $\mathcal{B}(X,Y)$ ein BR, falls Y vollständig ist. Der Spezialfall $Y = \mathbf{C}$ ist von besonderer Bedeutung:

3.18. Definition. Sei X ein normierter VR, $\lambda: X \to \mathbf{C}$ linear und stetig. Dann heißt λ ein *stetiges (lineares) Funktional* auf X. Die Norm eines stetigen linearen Funktionals wird in kanonischer Weise gegeben durch

$$\|\lambda\| = \sup_{x \in X, \|x\| \leq 1} |\lambda(x)|; \tag{3.9}$$

vgl. Def. 3.10 und Gl. (3.7). Man schreibt dann

$$X' := \mathcal{B}(X, \mathbf{C})$$

für den BR der beschränkten (d.h., stetigen) linearen Funktionale auf dem normierten VR X.

Bem.: Der Zustand eines physikalischen Systems wird durch *Messungen* bestimmt; jede Messung entspricht der Auswertung eines (stetigen) linearen Funktionals (mit Werten in $\mathbf{R}$).

3.19. Beispiel. Mit den Bezeichnungen aus Beispiel 3.4 gilt

$$\ell_1' \tilde{=} \ell_\infty, \qquad c_0' \tilde{=} \ell_1. \qquad \text{(isometrisch isomorph)}$$

Beweis der ersten Gleichheit in den Übungen!

(1) Wir zeigen, daß ℓ_1 stetig in c_0' eingebettet werden kann, d.h., es gibt eine stetige, injektive Abb. $\iota : \ell_1 \to c_0'$; man schreibt dann auch $\ell_1 \hookrightarrow_\iota c_0'$.
Sei $a = (a_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \ell_1$; wir definieren dann

$$\Lambda(x) := \sum_k a_k x_k, \qquad \forall x = (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \in c_0; \tag{3.10}$$

die (absolute) Konvergenz der Reihe $\sum_k a_k x_k$ folgt sofort aus der Abschätzung

$$|\sum_k a_k x_k| \leq \max_k |x_k| \sum_k |a_k| = \|x\|_\infty \, \|a\|_1 \, .$$

Weiter sehen wir, daß Λ ein stetiges lineares Funktional auf c_0 mit Norm $\|\Lambda\| \leq \|a\|_1$ ist. Man sieht leicht, daß $\|\Lambda\| \geq \|a\|_1$ gilt: wähle $x^{(m)} \in c_{00}$ mit

$$x_k^{(m)} := \frac{|a_k|}{a_k}, \qquad 1 \leq k \leq m,$$

falls $a_k \neq 0$, und $x_k^{(m)} = 0$ sonst. Dann gilt

$$\Lambda(x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{m} |a_k| \to \|a\|_1 \,, \qquad m \to \infty,$$

während $\left\|x^{(m)}\right\|_\infty \in \{0, 1\}$ ist, also $\left\|x^{(m)}\right\|_\infty \leq 1$. Damit folgt $\|\Lambda\| \geq \|a\|_1$.
Es ist klar, daß verschiedene Folgen $a \in \ell_1$ auch verschiedene lineare Funktionale erzeugen. Daher liefert (3.10) eine Einbettung ι (sogar isometrische Einb.) von ℓ_1 nach c_0'.

(2) Wir zeigen nun, daß $\iota\colon \ell_1 \to c_0'$ surjektiv ist:
Sei $\lambda \in c_0'$. Wir verwenden wieder die Bezeichnung

$$e^{(k)} := (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots),$$

mit der 1 an der k-ten Stelle. *Wenn wir annehmen,* daß λ von einer Folge $(a_j)_{j\in\mathbf{N}} \in \ell_1$ herstammt, dann gilt notwendigerweise

$$\lambda(e^{(k)}) = \sum_j a_j e_j^{(k)} = a_k.$$

Wir sehen also, daß es nur einen einzigen sinnvollen Kandidaten für die gesuchte Darstellung von λ gibt und *definieren* daher

$$a_k := \lambda(e^{(k)}), \qquad k \in \mathbf{N}. \tag{3.11}$$

Wir zeigen zunächst $(a_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell_1$. Dazu betrachten wir $x^{(m)} \in c_{00}$ wie in (1), das wir in der Form

$$x^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|}{a_k} e^{(k)},$$

schreiben können (falls $a_k = 0$ ist muß man $\frac{|a_k|}{a_k}$ durch 0 ersetzen). Offensichtlich gilt

$$\lambda(x^{(m)}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{|a_k|}{a_k} \lambda(e^{(k)}) = \sum_{k=1}^{m} |a_k|,$$

und

$$|\lambda(x^{(m)})| \leq \|\lambda\| \left\|x^{(m)}\right\|_\infty \leq \|\lambda\| \,.$$

Daher gilt $\sum_{k=1}^{m} |a_k| \leq \|\lambda\|$ für alle $m \in \mathbf{N}$ und es folgt $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$, also $(a_k) \in \ell_1$.
Sei nun $L \in c_0'$ das von der Folge $(a_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \ell_1$ erzeugte Funktional. Man sieht sofort, daß $L(e^{(k)}) = \lambda(e^{(k)})$, für alle $k \in \mathbf{N}$. Daher stimmen L und λ auch auf endlichen Linearkombinationen der $e^{(k)}$ überein. Wegen $\operatorname{span}\{e^{(k)}; k \in \mathbf{N}\}$ dicht, folgt $L = \lambda$. ∎

• Der Bidualraum X''.

Da der Dualraum eines BR X selbst wieder ein BR ist, besitzt auch X' einen Dualraum. I.a. ist nicht unmittelbar klar, wie reichhaltig oder wie groß die Räume X' und X'' sind. Zur Beantwortung dieser Fragen werden wir später den *Satz von Hahn-Banach* heranziehen.

3.20. Definition. Sei X ein normierter VR. Dann heißt

$$X'' := (X')'$$

der *Bidualraum* von X.

Beispiel: Nach Beispiel 3.19 wissen wir $c_0' \tilde{=} \ell_1$, $\ell_1' \tilde{=} \ell_\infty$, also ist $c_0'' \tilde{=} \ell_\infty$.

Wir können X mittels einer kanonischen Abbildung isometrisch isomorph in X'' einbetten; insbesondere können wir X als Unterraum von X'' auffassen:
Dazu definieren wir eine lineare Abbildung J_X, die jedem Element $x \in X$ ein stetiges lineares Funktional auf X' durch *Transposition* zuordnet:

$$J_X(x) : X' \to \mathbf{C}, \qquad J_X(x)(\varphi) := \varphi(x), \quad \forall \varphi \in X'; \tag{3.12}$$

wir schreiben kurz

$$\tilde{x}(\varphi) := J_X(x)(\varphi). \tag{3.13}$$

Häufig trifft man auf die folgende suggestive Schreibweise, die die *duale Paarung* hervorhebt:

$$\langle \tilde{x} \,, \varphi \rangle_{X'',X'} = \langle \varphi \,, x \rangle_{X',X} \,. \tag{3.14}$$

Wegen

$$|\tilde{x}(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_{X'} \, \|x\|_X \,, \qquad \forall \varphi \in X', \tag{3.15}$$

ist $J_X(x) \in (X')'$. Genauer gilt:

3.21. Satz. *Die kanonische Abbildung*

$$J_X : X \to X'',$$

definiert durch

$$J_X(x) := \tilde{x}, \qquad \tilde{x}(\varphi) := \varphi(x), \quad \forall \varphi \in X',$$

ist ein isometrischer Isomorphismus zwischen X und dem Bild $J_X(X) \subset X''$.

Beweis. Die Linearität von $J_X : X \to X''$ ist klar. Wegen (3.15) gilt weiter

$$\|J_X(x)\|_{X''} \leq \|x\|_X \,;$$

das beweist die Stetigkeit von J_X sowie $\|J_X\| \leq 1$.

Nach einem Korollar zum Satz von Hahn-Banach (Kor. 7.15) gibt es zu jedem $x_0 \in X$ ein $\varphi_0 \in X'$ mit $\|\varphi_0\|_{X'} = 1$ und $|\varphi_0(x_0)| = \|x_0\|_X$; man nennt φ_0 ein *tangentiales Funktional zu* x_0. Es folgt

$$\|J_X(x_0)\|_{X''} \geq |J_X(x_0)(\varphi_0)| = |\varphi_0(x_0)| = \|x_0\|_X ,$$

also $\|J_X(x_0)\|_{X''} \geq \|x_0\|_X$. ∎

3.22. Korollar. *Jeder normierte VR X läßt sich vervollständigen, d.h., es gibt einen BR $\tilde{X}$ und einen isometrischen Isomorphismus*

$$\Phi : X \to \Phi(X) \subset \tilde{X},$$

mit $\overline{\Phi(X)} = \tilde{X}$.

Beweis ist klar, wähle $\Phi := J_X$, $\tilde{X} := \overline{J_X(X)} \subset X''$ (mit Abschließung in X'').

3.23. Definition. Ein normierter VR X heißt *reflexiv*, falls die kanonische Einbettung

$$J_X : X \hookrightarrow X''$$

surjektiv ist. (X ist dann selbst schon ein BR.)

Beispiele.
(1) Hilberträume sind reflexiv. (Riesz)
(2) Für $1 < p < \infty$ sind die Räume ℓ_p reflexiv.
(3) Die Räume ℓ_1, ℓ_∞ sind *nicht* reflexiv.

Bemerkung. Es kann sein, daß X und X'' isometrisch isomorph sind während zugleich X *nicht* reflexiv ist.

3.24. Definition. Ein normierter VR X heißt *uniform konvex*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit:

$$\|x\| = \|y\| = 1, \quad \left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| > 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

d.h., der Rand der Einheitskugel ist nirgends flach, genauer: der Rand der Einheitskugel besitzt überall eine "Mindestkrümmung". (Bild!)

3.25. Theorem. *Jeder uniform konvexe BR X ist reflexiv.* (ohne Bew.)

3.26. Theorem. (Clarkson) *Für $G \subset \mathbf{R}^n$ offen und $2 \leq p < \infty$ sind die Räume $L_p(G)$ uniform konvex.* (und damit reflexiv, nach dem vorangehenden Theorem.)

Bemerkungen.
(a) Man zeigt leicht, daß ein BR X genau dann reflexiv ist, wenn sein Dualraum X' reflexiv ist.
(b) Die Räume L_p und L_q sind dual zueinander, wenn $1 < p, q < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt. Daher sind die Räume $L_p(G, \mathrm{d}x)$ für $1 < p < \infty$ sämtlich reflexiv. (Tatsächlich sind auch die Räume $L_p(G, \mathrm{d}x)$ für $1 < p < 2$ uniform konvex, das ist aber viel schwerer zu zeigen! Vgl. [RS-I; pp. 87/88, prblm. 25].
(c) Für $\emptyset \neq G \subset \mathbf{R}^n$ sind $L_1(G, \mathrm{d}x)$ und $L_\infty(G, \mathrm{d}x)$ nicht reflexiv.