¶2. Halbnormen und lokalkonvexe Topologien.

Unser Ziel ist es, lineare Räume (d.h., Vektorräume) so zu topologisieren, daß die linearen Operationen stetig werden.

2.1. Definition. Sei X ein VR über $\mathbf{R}$ oder über $\mathbf{C}$ und sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X. Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt ein *topologischer Vektorraum*, wenn $(X, \mathcal{T})$ Hausdorff ist und die Abbildungen

$$\mu: X \times \mathbf{C} \to X, \qquad (x, \lambda) \mapsto \lambda x,$$

und

$$\alpha: X \times X \to X, \qquad (x, y) \mapsto x + y,$$

stetig sind.

Beispiel. Normierte VRe sind topologische VR. Die Topologie wird dabei von der Metrik $d(x, y) := \|x - y\|$ erzeugt.

Bem.: Wenn U offene Nullumgebung in $(X, \mathcal{T})$ ist, so ist $x + U$ eine offene Umgebung von x, für alle $x \in X$. (Vgl. ÜA 2.1)

Der Begriff des topologischen VRs ist für unsere Zwecke zu allgemein. Wir werden uns ausschließlich mit den

lokalkonvexen topologischen VRen

befassen. In diesen Räumen wird die Topologie durch eine Familie von *Halbnormen* erzeugt.

• Besonders einfach ist der Fall, wo die Halbnormfamilie abzählbar gewählt werden kann; dann wird die Topologie sogar durch eine Metrik erzeugt.

• Falls die Halbnormfamilie abzählbar ist und der Raum zusätzlich vollständig ist, spricht man von einem *Fréchet-Raum*. Fréchet-Räume haben noch einiges mit Banachräumen gemeinsam. Für die FT sind sie von Bedeutung, weil der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ein Fréchet-Raum ist.

Wir beginnen mit dem Begriff der Halbnorm:

2.2. Definition. Sei X ein VR.

(a) Eine *Halbnorm* auf X ist eine Abb. $p: X \to \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften:

(i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \qquad \forall x, y \in X;$

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x), \qquad \forall \lambda \in \mathbf{C}, \quad x \in X;$

(b) Sei $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Halbnormen auf X, mit A Indexmenge. Wir sagen, $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ *trennt die Punkte von* X, wenn die folgende Bed. erfüllt ist:

(iii) $(\ p_\alpha(x) = 0, \quad \forall x \in A) \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$

Äquivalent zu *(iii)* ist offenbar die Forderung, daß es zu jedem $x \neq 0$ ein $\alpha \in A$ gibt mit $p_\alpha(x) \neq 0$.

An dieser Schlüsselstelle kommt die Geometrie in's Spiel. Wir definieren:

2.3. Definition. Sei X VR, und sei $C \subset X$.

(a) C heißt *konvex,* wenn mit $x, y \in C$ und $t \in [0,1]$ auch $tx + (1-t)y \in C$ ist. (Bild!)

(b) C heißt *kreisförmig,* wenn mit $x \in C$ und $\lambda \in \mathbf{C}$ mit $|\lambda| = 1$ auch $\lambda x \in C$ ist. ("balanced, circled, équilibré")

(c) C heißt *absorbierend,* wenn $\cup_{t>0}(tC) = X$ ist, d.h., wenn es zu jedem $x \in X$ ein $s > 0$ gibt mit $sx \in C$.

Bem.: In der Definition für "kreisförmig" wird oft $|\lambda| \leq 1$ gefordert. In den meisten Fällen hat man es aber ohnehin mit konvexen Mengen zu tun, die die Null enthalten, und dann macht das keinen Unterschied.

2.4. Definition. Sei X VR, $A \subset X$ konvex und absorbierend. Die Abbildung $\varrho: X \to [0, \infty)$, definiert durch

$$\varrho(x) := \inf\{\lambda \in [0, \infty)\,;\, x \in \lambda A\}$$

heißt das *Minkowskifunktional* der Menge A.

2.5. Proposition. (Eigenschaften von Halbnormen.)
Sei p eine Halbnorm auf dem VR X. Dann gilt
(a) $p(0) = 0$.
(b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$.
(c) $p(x) \geq 0$.
(d) $\{x \in X\,;\, p(x) = 0\}$ *ist ein linearer Teilraum von* X.
(e) Die Menge $B := \{x \in X\,;\, p(x) < 1\}$ *ist konvex, kreisförmig und absorbierend, und* p *ist das Minkowski-Funktional von* B.

Beweis. (a) folgt sofort aus $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ mit $\lambda = 0$.
Wegen p subadditiv gilt

$$p(x) = p(x - y + y) \leq p(x-y) + p(y),$$

mithin $p(x) - p(y) \leq p(x-y)$. Vertauschen von x und y liefert die Beh. (b), da $p(x-y) = p(y-x)$.
Aus (b) mit $y := 0$ folgt $p(x) \geq |p(x)| \geq 0$.
(d) Seien $x, y \in X$ mit $p(x) = p(y) = 0$ und seien $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$. Dann gilt auch $p(\alpha x + \beta y) = 0$.
(e) B kreisförmig ist trivial.
B konvex: Seien $x, y \in B$ und sei $0 < t < 1$. Dann ist $p(tx + (1-t)y) \leq tp(x) + (1-t)p(y) < 1 \quad \Longrightarrow \quad tx + (1-t)y \in B$.
B absorbierend: Für $x \in X$ und $s > p(x)$ ist $p(s^{-1}x) = s^{-1}p(x) < 1 \quad \Longrightarrow \quad s^{-1}x \in B$.
Sei nun ϱ_B das Minkowskifunktional zu B. Die vorangehende Zeile beweist $\varrho_B \leq p$.
Umgekehrt folgt aus $0 < t < p(x)$, daß $p(t^{-1}x) \geq 1$, d.h., $t^{-1}x \notin B$. Also gilt $\varrho_B(x) \geq t$, und wir erhalten $\varrho_B(x) \geq p(x)$. ∎

2.6. Satz.
Sei X ein VR und $A \subset X$ sei konvex und absorbierend; ϱ_A sei das Minkowski-Funktional zu A. Dann gilt:
(a) $\varrho_A(x+y) \leq \varrho_A(x) + \varrho_A(y)$;
(b) $\varrho_A(tx) = t\varrho_A(x), \qquad \forall t \geq 0$;
(c) ϱ_A ist eine Halbnorm, falls A außerdem kreisförmig ist.
(d) Seien $B := \{x \in X\,;\, \varrho_A(x) < 1\}$ und $C := \{x \in X\,;\, \varrho_A(x) \leq 1\}$. Dann gilt $B \subset A \subset C$ und $\varrho_A = \varrho_B = \varrho_C$.

Beweis. Wir ordnen jedem $x \in X$ die Menge

$$H_A(x) := \{t > 0\,;\, t^{-1}x \in A\}$$

zu. Jedes $H_A(x)$ ist eine Halbgerade mit linkem Endpunkt $\varrho_A(x)$ (denn: falls $t \in H_A(x)$ und $s > t$, so folgt $s \in H_A(x)$, da $0 \in A$ und A konvex.)
Sei nun $s > \varrho_A(x)$, $t > \varrho_A(y)$ und $u := s + t$.
$\implies \quad s^{-1}x \in A$ und $t^{-1}y \in A$. Wegen A konvex gilt auch

$$u^{-1}(x+y) = \frac{s}{u}(s^{-1}x) + \frac{t}{u}(t^{-1}x) \in A.$$

$\implies \quad \varrho_A(x+y) \leq u$, was Beh. (a) beweist.
Die Eigenschaften (b) und (c) sind nun klar.
Zu (d): Aus $\varrho_A(x) < 1$ folgt $1 \in H_A(x)$ und somit $x \in A$. Weiter impliziert $x \in A$, daß $\varrho_A(x) \leq 1$ ist. Daher gilt

$$B \subset A \subset C,$$

also

$$H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$$

und

$$\varrho_C(x) \leq \varrho_A(x) \leq \varrho_B(x).$$

Um die behauptete Gleichheit zu zeigen, betrachten wir $t > s > \varrho_C(x)$. Dann ist $s^{-1}x \in C$, also $\varrho_A(s^{-1}x) \leq 1$ und folglich

$$\varrho_A(t^{-1}x) \leq \frac{s}{t} < 1.$$

$$\implies \quad t^{-1}x \in B \quad \implies \quad \varrho_B(t^{-1}x) \leq 1 \quad \implies \quad \varrho_B(x) \leq t. \qquad \blacksquare$$

Wir kommen nun zu einem grundlegenden Begriff der Funktionalanalysis:

2.7. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer VR (also insbesondere ein Hausdorff-Raum). Wenn $(X, \mathcal{T})$ eine Nullumbebungsbasis besitzt, die aus konvexen, kreisförmigen und absorbierenden Mengen besteht, dann nennen wir $(X, \mathcal{T})$ einen *lokalkonvexen topologischen Vektorraum*, oder kurz: einen *lokalkonvexen Raum.*

Bemerkungen.
(a) Rudin [R] verwendet die folgende (äquivalente!) Definition: $(X,\mathcal{T})$ heißt ein lokalkonvexer Raum, wenn $(X,\mathcal{T})$ ein topologischer VR ist, dessen einpunktige Mengen $\{x\}$ abgeschlossen sind, und der eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen besitzt. Daher ist *Konvexität* die entscheidende Zusatzeigenschaft.
(b) Lokalkonvexe Räume können äquivalent über Familien von Halbnormen charakterisiert werden; s.u.!

2.8. Satz. *Sei X ein VR und $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ eine Familie von Halbnormen auf X, die die Punkte von X trennt (d.h., zu jedem $0 \neq x \in X$ gibt es ein $\gamma = \gamma_x \in \Gamma$ mit $p_{\gamma_x}(x) \neq 0$). Für jedes* endliche *System $p_{\gamma_1},\ldots,p_{\gamma_n}$ von Halbnormen und beliebige positive $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ ist die Menge*

$$U := \{x \in X \; ; \; p_{\gamma_j}(x) \leq \varepsilon_j, \quad j = 1,\ldots,n\}$$

konvex, kreisförmig, und absorbierend. Wir betrachten diese Mengen U als Umgebungen der Null in X, und definieren Umgebungen eines bel. Punktes $x_0 \in X$ durch

$$x_0 + U := \{y \in X \; ; \; \exists u \in U\colon y = x_0 + u\}.$$

Schließlich nennen wir eine Menge $G \subset X$ offen, wenn G eine Umgebung eines jeden $x \in G$ ist.
Die Menge aller solcher G erzeugt eine Hausdorff-Topologie auf X.

Beweis. Nach Satz 2.5, (e), sind die Mengen U konvex, absorbierend und kreisförmig. Wir zeigen zunächst, daß jede Menge

$$G_{\gamma,c} := \{x \in X \; ; \; p_\gamma(x) < c\}$$

offen ist: Für $x_0 \in G_{\gamma,c}$ ist nämlich $\beta := p_\gamma(x_0) < c$. Nach unserer Definition ist

$$U := \{x \in X \; ; \; p_\gamma(x) \leq \frac{1}{2}(c-\beta)\}$$

eine Nullumgebung; also ist $x_0 + U$ eine Umgebung von x_0. Für $u \in U$ gilt

$$p_\gamma(x_0+u) \leq p_\gamma(x_0) + p_\gamma(u) \leq \beta + \frac{1}{2}(c-\beta) = \frac{1}{2}(c+\beta) < c,$$

mithin $x_0 + U \subset G_{\gamma,c}$. Es ist nun weiter klar, daß endliche Durchschnitte offener Mengen offen und beliebige Vereinigungen offener Mengen ebenfalls offen sind. Damit haben wir eine Topologie auf X erzeugt.
Zur Hausdorff-Eigenschaft: Genügt zu zeigen, daß wir jeden Punkt $x_0 \neq 0$ vom Nullpunkt trennen können. Da die Familie $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ von Halbnormen die Punkte von X trennt, gibt es ein $\gamma_0 \in \Gamma$ mit $\alpha := p_{\gamma_0}(x_0) > 0$. Nach der obigen Überlegung ist

$$U_0 := \{x \in X \; ; \; p_{\gamma_0}(x) < \alpha/2\}$$

offen. Wir zeigen noch

$$U_0 \cap (x_0 + U_0) = \emptyset.$$

Bew. der Beh.: Angenommen, $y \in U_0 \cap (x_0 + U_0)$. Dann gibt es ein $g \in U_0$ mit $y = x_0 + g$ und es folgt

$$p_{\gamma_0}(x_0) = p_{\gamma_0}(x_0 + g - g) = p_{\gamma_0}(y - g) \le p_{\gamma_0}(y) + p_{\gamma_0}(-g).$$

Wegen $y \in U_0$ und $-g \in U_0$ folgt $p_{\gamma_0}(x_0) < \alpha$, Widerspruch! ∎

2.9. Satz. (ÜA??) *Mit den Vorausssetzungen und Definitionen von Satz 2.8 ist X ein topologischer VR. Weiter sind alle p_γ, $\gamma \in \Gamma$, stetig.*

Bemerkung: Die in Satz 2.8 erklärte Topologie ist die von der Familie $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ induzierte Topologie auf X, d.h., die kleinste (oder: schwächste) Topologie auf X, für die alle p_γ stetig sind.

Wir haben damit bewiesen:

2.10. Theorem. *Sei X ein VR und sei $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ eine Familie von Halbnormen auf X, die die Punkte von X trennt. Für $\gamma \in \Gamma$ und $n \in \mathbf{N}$ sei*

$$V_{\gamma,n} := \{x \in X \; ; \; p_\gamma(x) < \frac{1}{n}\},$$

und sei $\mathcal{B}$ die Menge aller endlichen Durchschnitte von Mengen $V_{\gamma,n}$.
Dann ist $\mathcal{B}$ Nullumgebungsbasis einer Topologie $\mathcal{T}$ auf X mit der Eigenschaft, daß $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer topolog. VR ist. Weiter sind alle p_γ, $\gamma \in \Gamma$, stetige Abbildungen von $(X, \mathcal{T})$ nach $\mathbf{R}$.

2.11. Beispiele.
(A) Sei X ein VR und L eine Familie linearer Funktionale, die die Punkte von X trennt. Dann erzeugen die Halbnormen

$$X \ni x \mapsto p_\ell(x) := |\ell(x)|,$$

für $\ell \in L$, eine lokalkonvexe Topologie auf X. Diese Topologie ist genau die $\sigma(X, L)$-Topologie, d.i., die schwächste Topologie auf X für die alle $\ell \in L$ stetig sind.
Der Spezialfall X BR, $L := X'$, liefert genau die schwache Topologie auf X, in dieser Notation $\sigma(X, X')$.

(B) Der Raum $\mathcal{E}^k(\Omega)$:
Für $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ offen ist $C^k(\Omega)$ ein linearer Raum. Wir führen die folgende Notation für *Multi-Indizes* ein:
$s \in (\mathbf{N}_0)^m$, $s = (s_1, \ldots, s_m)$ mit $s_j \in \mathbf{N}_0$, heißt *Multi-Index*. Wir schreiben dann weiter $|s| = s_1 + \ldots + s_m$ (s-Länge) und

$$D^s f(x) := \left(\frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_m^{s_m}} f \right) (x_1, \ldots, x_m),$$

und

$$s! := s_1! \cdot \ldots \cdot s_m!.$$

Wir verwenden die folgende Bezeichung:
Für Mengen $A, B \subset \mathbf{R}^m$ soll $A \subset\subset B$ bedeuten: A offen, $\overline{A}$ kompakt und $\overline{A} \subset B$.
Für jedes $K \subset\subset \Omega$ definieren wir nun Halbnormen

$$p_K(f) := \max_{|s| \leq k} \sup_{x \in K} |(D^s f)(x)|, \qquad f \in C^k(\Omega).$$

In der Tat genügt es hier, mit einer *abzählbaren* Familie von Halbnormen zu arbeiten: Seien hierzu $K_i \subset\subset \Omega$ mit $K_i \subset\subset K_{i+1}$ und

$$\cup_{i \in \mathbf{N}} K_i = \Omega;$$

(zur Konstruktion solcher Ausschöpfungen durch Kompakta, vgl. ÜA 3.4). Wir können dann die (abzählbare) Familie von Halbnormen

$$q_i(f) := \sup_{x \in K_i,\, |s| \leq k} |(D^s f)(x)|$$

betrachten. Diese Familie enthält dieselbe Information wie die Familie $(p_K)_{K \subset\subset \Omega}$.

Der Raum $C^k(\Omega)$, versehen mit der durch die Familie $(q_i)_{i \in \mathbf{N}}$ erzeugten Metrik (vgl. ÜA 2.4), wird mit $\mathcal{E}^k(\Omega)$ bezeichnet.

(C) Der Raum $\mathcal{E}(\Omega)$.
Um den Raum $C^\infty(\Omega)$ zu topologisieren, verwenden wir die Halbnormen

$$q_j(f) := \sup_{x \in K_j,\, |s| \leq j} |(D^s f)(x)|.$$

Der Raum $C^\infty(\Omega)$, versehen mit der von den q_j erzeugten Metrik (vgl. ÜA 2.4), wird mit $\mathcal{E}(\Omega)$ bezeichnet.

2.12. Definition. Sei X ein VR. Zwei Familien von Halbnormen $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ und $(q_\beta)_{\beta \in B}$, die die Punkte von X trennen, heißen *äquivalent,* wenn sie auf X dieselbe lokalkonvexe Topologie erzeugen.

2.13. Satz. *Seien $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ und $(q_\beta)_{\beta \in B}$ zwei Familien von Halbnormen auf dem VR X. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) *Die Halbnormfamilien sind äquivalent.*
(b) *Jedes p_α ist stetig in der von den q_β erzeugten Topologie, und jedes q_β ist stetig in der von den p_α erzeugten Topologie.*
(c) *Zu jedem $\alpha \in A$ gibt es ein $C \geq 0$, ein $n \in N$, und $\beta_1, \ldots, \beta_n \in B$ mit*

$$p_\alpha(x) \leq C\left(q_{\beta_1}(x) + \ldots + q_{\beta_n}(x)\right), \qquad x \in X,$$

und zu jedem $\beta \in B$ gibt es ein $C' \geq 0$, ein $m \in N$, und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ mit

$$q_\beta(x) \leq C' \left(p_{\alpha_1}(x) + \ldots + p_{\alpha_m}(x)\right), \qquad x \in X.$$

Beweis. ÜA.

Bem.: Offenbar sind die Familien $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ und $(q_\beta)_{\beta\in B}$ genau dann äquivalent, wenn die identische Abbildung $I : X \to X$ ein Homöomorphismus zwischen $(X, (p_\alpha)_{\alpha\in A})$ und $(X, (q_\beta)_{\beta\in B})$ ist.

Von besonderer Bedeutung ist das folgende Kriterium für die Stetigkeit linearer Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen:

2.14. Theorem. *Seien X, Y lokalkonvexe topol. VRe, wobei die Topologie auf X durch die Halbnormen $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$, die Topologie auf Y durch die Halbnormen $(q_\beta)_{\beta\in B}$, mit Indexmengen A, B erzeugt werde. Weiter sei $T : X \to Y$ linear.*
Dann ist die Stetigkeit von T äquivalent zur folgenden Eigenschaft:

$$\forall \beta \in B, \exists k \in \mathbf{N}, \exists \alpha_1, \ldots \alpha_k \in A, \exists C \geq 0 : \quad q_\beta(Tx) \leq C\left(p_{\alpha_1}(x) + \ldots + p_{\alpha_k}(x)\right), \quad \forall x \in X. \tag{$\sharp$}$$

Beweis.
(1) Man überlegt leicht, daß eine lineare Abbildung genau dann stetig ist, wenn sie im Nullpunkt stetig ist.
(2) Wir zeigen, daß die Stetigkeit von T die Abschätzung ($\sharp$) impliziert.
Sei also $\beta \in B$. Dann ist

$$V := \{y \in Y \,;\, q_\beta(y) \leq 1\}$$

eine Nullumgebung in Y. Wegen T stetig gibt es eine Nullumgebung U in X mit $TU \subset V$.
Zur Nullumgebung U gibt es $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U' := \{x \in X \,;\, p_{\alpha_i}(x) \leq \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\} \subset U.$$

Erst recht gilt daher, daß

$$U'' := \{x \in X \,;\, p_{\alpha_1}(x) + \ldots + p_{\alpha_n}(x) \leq \varepsilon\} \subset U.$$

Damit haben wir also insgesamt $TU'' \subset V$, d.h.:

$$p_{\alpha_1}(x) + \ldots + p_{\alpha_n}(x) < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad q_\beta(Tx) \leq 1. \tag{$*$}$$

Dies können wir umschreiben als

$$q_\beta(Tx) \leq \varepsilon^{-1}(p_{\alpha_1}(x) + \ldots + p_{\alpha_n}(x)).$$

(Wende dazu $(*)$ an auf $x' := \frac{\varepsilon}{p_{\alpha_1}(x)+\ldots+p_{\alpha_n}(x)}x$.)
(3) Wir zeigen jetzt, daß umgekehrt aus ($\sharp$) die Stetigkeit von T folgt.
Sei dazu V eine Nullumgebung in Y. Dann gibt es eine Nullumgebung $V' \subset V$ der Form

$$V' = \{y \in Y \; ; \; q_{\beta_j}(y) \le \varepsilon, \; j = 1, \ldots, n\}.$$

Mit

$$V_j := \{y \in Y \; ; \; q_{\beta_j}(y) \le \varepsilon\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

gilt dann $V' = \cap_{j=1}^n V_j$.
Zu jedem $j = 1, \ldots, n$ gibt es nach Voraussetzung eine Nullumgebung $U_j \subset X$ mit $TU_j \subset V_j$ (wir können zB

$$U_j := \left\{x \in X \; ; \; p_{\alpha_\ell^{(j)}}(x) \le \frac{\varepsilon}{C_j k_j}, \quad \ell = 1, \ldots, k_j\right\},$$

nehmen, mit geeigneten $k_j \in \mathbf{N}$, $\alpha_1^{(j)}, \ldots, \alpha_{k_j}^{(j)} \in A$, und $C_j > 0$.)
Dann ist $U := \cap_{j=1}^n U_j$ Nullumgebung in X mit $TU \subset V$. ∎

Schließlich benötigen wir noch *Vollständigkeit:*

2.15. Definition. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topolog. VR.

(a) Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$ heißt ein *Cauchynetz,* wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathcal{T}$ ein $\alpha_0 \in A$ gibt mit $x_\alpha - x_\beta \in U$ für alle $\alpha, \beta \succ \alpha_0$.

(b) Der Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *vollständig,* wenn jedes Cauchynetz in X einen Limes in X besitzt.

Bem.: Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum, dessen Topologie von der Halbnormfamilie $(p_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ erzeugt wird. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$ ist offenbar genau dann ein Cauchy-Netz, wenn es zu jeder Halbnorm p_γ und jedem $\varepsilon > 0$ ein $\alpha_0 \in A$ so gibt, daß

$$p_\gamma(x_\alpha - x_\beta) < \varepsilon, \qquad \forall \alpha, \beta \succ \alpha_0.$$

Bem.: Sei nun speziell (X, d) ein metrischer Raum. Man definiert hier Cauchyfolgen bzw. Cauchynetze durch die Bedingungen

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbf{N}, \; \forall n, m \ge n_0 : d(x_n, x_m) < \varepsilon,$$

bzw.:

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \, \alpha_0 \in A, \; \forall \alpha, \beta \succ \alpha_0 : d(x_\alpha, x_\beta) < \varepsilon.$$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchyfolge einen Limes besitzt. Hier gilt nun: In einem metrisierbaren lokalkonvexen Raum, der als metrischer Raum vollständig ist, konvergiert auch jedes Cauchy*netz.* (ÜA) Dies hat die folgende erfreuliche Konsequenz: Wenn man von einem metrisierbaren lokalkonvexen Raum die Eigenschaft der Vollständigkeit nachweisen will, genügt es, Cauchy-Folgen zu betrachten.

Warnung. Wenn ein lokalkonvexer Raum *nicht metrisierbar* ist, so stehen die Chancen auf Vollständigkeit im allgemeinen nicht gut. Beispielsweise sind Banachräume, versehen mit der schwachen Topologie, niemals vollständig! (Vgl. z.B. R. Megginson, *Introduction to Banach Space Theory.* Springer). Jedoch ist die (abgeschlossene) Einheitskugel in einem reflexiven Banachraum in der schwachen Topologie vollständig; dies folgt aus dem Satz von Banach-Alaoglu.

Lokalkonvexe Räume, deren Topologie von *abzählbar* vielen Halbnormen erzeugt wird, sind metrisierbar. Wenn sie zugleich auch noch vollständig sind, so nennen wir sie **Fréchet-Räume**:

2.16. Definition. Ein lokalkonvexer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt *Fréchet-Raum,* wenn er vollständig und metrisierbar ist.

Bem.: Die Bezeichnung Fréchet-Raum wird in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt!

2.17. Beispiele.

(0) Alle Banach- und Hilberträume.

(1) Der Raum $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$ aller komplexen Zahlenfolgen mit den Halbnormen $p_k((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) := \max_{1\le j\le k} |x_j|$ ist ein Fréchet-Raum.

(2) Der Raum $\mathbf{s}$ der rasch fallenden Zahlenfolgen,

$$\mathbf{s} := \{(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\, ;\, \forall k \in \mathbf{N}_0 : \sup_{n\in\mathbf{N}} n^k |x_n| < \infty\}$$

mit den Halbnormen $p_k((x_n)_{n\in\mathbf{N}}) = \sup_{n\in\mathbf{N}} n^k|x_n|$, $k \in \mathbf{N}_0$.

(3) $C(\mathbf{R}^m)$ mit den Halbnormen $p_k(f) := \sup_{|x|\le k} |f(x)|$, $k \in \mathbf{N}$, da die Konvergenz bezügl. der von den Halbnormen p_k erzeugten Metrik gerade die gleichmäßige Konvergenz auf allen (kompakten) Kugeln $\{x \in \mathbf{R}^m\, ;\, |x| \le k\}$ ist.

(4) $C^\infty[a,b]$ mit den Halbnormen $p_k(f) := \left\|f^{(k)}\right\|_\infty$, $k \in \mathbf{N}_0$.

(5) Die Räume $\mathcal{E}^k(\Omega)$ und $\mathcal{E}(\Omega)$: s.o.!

2.18. Beispiel. (vgl. ÜA 5.5)
Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet, d.h., D offen und zusammenhängend. Sei $\mathcal{O}_D$ der VR der (einwertigen) analytischen Funktionen $f\colon D \to \mathbf{C}$. Für jedes $C \subset\subset D$ sei

$$p_C(f) := \sup_{z\in C} |f(z)|.$$

Dann ist $\mathcal{O}_D$, versehen mit der von den Halbnormen p_C erzeugten Topologie, ein Fréchet-Raum.
Für $B \subset\subset D$ sei

$$\varrho_B(f) := \left(\int_{z\in B} |f(z)|^2\right)^{1/2}, \qquad f \in \mathcal{O}_D.$$

Dann ist auch ϱ_B eine Halbnorm. Die Familien (p_C) und (ϱ_B) sind äquivalent.
Die hier diskutierte Topologie auf $\mathcal{O}_D$ bezeichnet man als die *"Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Teilmengen"* oder als die *"Topologie der lokal gleichmäßigen Konvergenz."* Sie ist die natürliche Topologie auf $\mathcal{O}_D$ (Weierstraß).

Wir haben in Thm. 2.10 gesehen, daß eine trennende Familie $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ von Halbnormen eine lokalkonvexe Topologie auf X erzeugt. Jetzt zeigen wir, daß umgekehrt *jede* lokalkonvexe Topologie auf X von einer Familie von Halbnormen stammt:

2.19. Theorem. *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokalkonvexer Raum, und sei $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis aus konvexen, kreisförmigen, absorbierenden Mengen. Für $B \in \mathcal{B}$ sei p_B das zugehörige Minkowskifunktional . Dann ist $(p_B)_{B\in\mathcal{B}}$ eine Familie von stetigen Halbnormen auf X, die die Punkte von X trennt.*
Die von der Familie $(p_B)_{B\in\mathcal{B}}$ erzeugte lokalkonvexe Topologie stimmt mit der gegebenen Topologie $\mathcal{T}$ überein.

Beweis.
(1) Wegen Satz 2.6 ist zunächst jedes p_B, $B \in \mathcal{B}$, eine Halbnorm auf X.
(2) Sei $0 \neq x \in X$. X Hausdorff $\implies$ es gibt ein $V = V_x \in \mathcal{B}$ mit $x \notin V$. $\implies$ $p_V(x) \geq 1$ $\implies$ $(p_B)_{B\in\mathcal{B}}$ trennt die Punkte von X.
(3) Für $B \in \mathcal{B}$ ist p_B stetig: Wir bemerken zunächst, daß für V Nullumgebung und $\varepsilon > 0$ auch εV Nullumgebung ist (wegen der Stetigkeit der skalaren Multiplikation im topolog. VR $(X, \mathcal{T})$).
Für $y - x \in \frac{\varepsilon}{2}B$ gilt

$$|p_B(y) - p_B(x)| \leq p_B(y - x) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

und dies impliziert die Stetigkeit von p_B.
(4) Die beiden Topologien stimmen überein: Sei $\mathcal{T}_1$ die von der Familie $(p_B)_{B\in\mathcal{B}}$ erzeugte Topologie.
(a) Sei $B \in \mathcal{B}$ und sei p_B das Minkowski-Funktional zu B. Dann ist

$$A := \{x \in X \; ; \; p_B(x) \leq 1/2\}$$

eine Nullumgebung bezüglich der Topologie $\mathcal{T}_1$. Wegen $A \subset B$ nach Satz 2.6, (d), ist daher auch B eine Nullumgebung bzgl. $\mathcal{T}_1$. Dies beweist $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_1$.
(b) Die Mengen $A := \{x \in X \; ; \; p_B(x) \leq 1\}$ mit $B \in \mathcal{B}$ bilden definitionsgemäß eine Nullumgebungsbasis der Topologie $\mathcal{T}_1$. Wegen $B \subset A$ (nach Satz 2.6) ist dann A auch Nullumgebung für die Topologie $\mathcal{T}$. Dies beweist $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$. ∎

Wir fassen nun zusammen:

2.20. Theorem. *Sei X ein VR.*
(a) Jede Familie von Halbnormen auf X, die die Punkte von X trennt, erzeugt eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die $(X, \mathcal{T})$ zu einem lokalkonvexen Raum macht.

(*b*) *Umgekehrt gibt es zu jedem lokalkonvexen Raum* $(X, \mathcal{T})$ *eine Familie von (stetigen) Halbnormen, die genau die Topologie* $\mathcal{T}$ *erzeugt.*

Wir beenden diesen Paragraphen mit 2 Anwendungen des Satzes von Hahn und Banach:

2.21. Theorem. (Hahn-Banach, komplex)
Sei X *ein* $\mathbf{C}$*-VR,* $p\colon X \to \mathbf{R}$ *mit*

$$p(\alpha x + \beta y) \leq |\alpha| p(x) + |\beta| p(y),$$

für alle $x, y \in X$ *und alle* $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ *mit* $|\alpha| + |\beta| = 1$. *Weiter sei* Y *ein Teilraum von* X *und sei*

$$\lambda\colon Y \to \mathbf{C}$$

ein lineares Funktional mit

$$|\lambda(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in Y.$$

Dann gibt es ein lineares Funktional $\Lambda\colon X \to \mathbf{C}$ *mit*

$$|\Lambda(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in X,$$

das λ *fortsetzt, d.h.,* $\Lambda(x) = \lambda(x)$ *für alle* $x \in Y$.

2.22. Korollar. *Sei* Y *Teilraum eines lokalkonvexen Raums* X. *Sei* $\ell\colon Y \to \mathbf{C}$ *linear und stetig. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional* $L\colon X \to \mathbf{C}$ *mit* $L|Y = \ell$.

Bemerkung. Wenn die Topologie $\mathcal{T}$ von X durch die Halbnormen $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ induziert wird, dann bilden die Einschränkungen $p_\gamma|Y$, $\gamma \in \Gamma$, eine Familie von Halbnormen auf Y, die die Punkte von Y trennt. Die vorausgesetzte Stetigkeit von ℓ bezieht sich auf die durch $(p_\gamma|Y)_{\gamma\in\Gamma}$ induzierte lokalkonvexe Topologie auf Y. Wegen Thm. 2.14 ist die Stetigkeit von $\ell\colon Y \to \mathbf{C}$ gleichbedeutend mit der Existenz von *endlich vielen* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ und einer Konstanten $C \geq 0$ mit

$$|\ell(x)| \leq C\left(p_{\gamma_1}(x) + \ldots + p_{\gamma_n}(x)\right), \qquad x \in Y. \tag{$*$}$$

Beweis von Kor. 2.22. Es ist

$$p := p_{\gamma_1} + \ldots + p_{\gamma_n}$$

eine stetige Halbnorm auf X; weiter gilt

$$|\ell(x)| \leq Cp(x), \qquad x \in Y.$$

Nach Thm. 2.21 (Hahn-Banach) gibt es ein lineares Funktional $L\colon X \to \mathbf{C}$ mit $L|Y = \ell$ und $|L(x)| \leq Cp(x)$ für alle $x \in X$. Mit Thm. 2.14 folgt aus dieser Abschätzung die Stetigkeit von L. ∎

Folgerung. Sei X lokalkonvexer Raum und sei $0 \neq x \in X$. Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional λ auf X mit $\lambda(x) \neq 0$, d.h., die stetigen linearen Funktionale auf X trennen die Punkte von X. Wir definieren

$$X^* := \{\ell \colon X \to \mathbf{C}\, ;\, \ell \text{ linear und stetig}\}.$$

X^* heißt (*topologischer* oder *stetiger*) Dualraum zu X.

Schließlich wollen wir noch untersuchen, wann sich zwei disjunkte konvexe Teilmengen von X durch eine Hyperebene trennen lassen. Der Einfachheit halber nehmen wir in diesem Abschnitt an, daß X ein $\mathbf{R}$-VR ist. Wenn $0 \neq \ell \in X^*$ reellwertig und $a \in \mathbf{R}$ ist, dann nennen wir die Menge $\{x \in X\, ;\, \ell(x) = a\}$ eine *Hyperebene.*

2.23. Definition. Sei X lokalkonvexer Raum, und seien $A, B \subset X$. Wir sagen, daß A und B *durch eine Hyperebene* getrennt werden, wenn es ein stetiges Funktional $\ell \colon X \to \mathbf{R}$ und ein $t \in \mathbf{R}$ gibt mit

$$\ell(x) \leq t, \quad \forall x \in A, \qquad \text{und} \qquad \ell(x) \geq t, \quad \forall x \in B.$$

A und B werden *strikt getrennt*, falls $\ell(x) < t$ für $x \in A$ und $\ell(x) > t$ für $x \in B$.
Bild!!!

2.24. Theorem. *Seien A und B konvexe Teilmengen des lokalkonvexen Raums X mit $A \cap B = \emptyset$. Dann gilt:*

(*a*) *Wenn A offen ist, können A und B durch eine Hyperebene getrennt werden.*
(*b*) *Wenn A und B offen sind, können sie strikt durch eine Hyperebene getrennt werden.*
(*c*) *Wenn A kompakt ist und B abgeschlossen, können A und B durch eine Hyperebene strikt getrennt werden.*

Beweis.
(a) Wir wählen ein $x \in B - A := \{b - a\, ;\, a \in A, b \in B\}$ und definieren $C := \{x\} + (A - B)$.
Wegen A offen sind auch $A - B$ und C offen.
Wegen $0 \in C$ ist also C eine (offene) Nullumgebung und enhält daher eine konvexe, absorbierende Nullumgebung. $\implies$ C absorbierend.
A, B konvex $\implies$ C konvex.
$A \cap B = \emptyset$ $\implies$ $x \notin C$.
Sei nun ϱ_C das Minkowski-Funktional von C. Dann ist ϱ_C ein sublineares Funktional auf X und genügt den Voraussetzungen an p im (reellen) Satz von Hahn-Banach.
Auf dem (reell 1-dimensionalen) Unterraum

$$Y := \{\lambda x\, ;\, \lambda \in \mathbf{R}\}$$

definieren wir das lineare Funktional $\ell \colon Y \to \mathbf{R}$ durch $\ell(\lambda x) := \lambda$. Wegen $x \notin C$ ist $\varrho_C(x) \geq 1$, also gilt $\ell(x) \leq \varrho_C(x)$. Nach der reellen Version von Thm. 2.21 gibt es ein $L \colon X \to \mathbf{R}$ linear mit

$$L|Y = \ell, \qquad L(z) \leq \varrho_C(z), \quad \forall z \in X.$$

Beh. 1: L stetig.
Bew. der Beh.: $C \cap (-C)$ ist Nullumgebung in X. Für $z \in C \cap (-C)$ ist aber $L(z) \leq \varrho_C(z) \leq 1$ und $-L(z) = L(-z) \leq \varrho_C(-z) \leq 1$, also $|L(z)| \leq 1$. Es folgt:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Nullumgebung $U_\varepsilon \subset X$ mit $L(U_\varepsilon) \subset [-\varepsilon, \varepsilon] \implies L$ stetig.
Beh. 2: L trennt A und B.
Bew. der Beh.: Für alle $y \in C$ ist $L(y) \leq 1$. Für $a \in A$, $b \in B$ ist $x + a - b \in C$, und es folgt

$$\begin{aligned} L(a) &= L(b + (x + a - b) - x) \\ &= L(b) + L(x + a - b) - L(x) \\ &\leq L(b) + 1 - L(x) \leq L(b), \end{aligned}$$

da $L(x + a - b) \leq 1$ und $L(x) = 1$. Es folgt

$$\sup_{a \in A} L(a) \leq \inf_{b \in B} L(b). \tag{$*$}$$

(b) Sei L ein lineares Funktional, das A und B trennt (vgl. (a)). Wegen $L \neq 0$ und A, B offen sind die Bilder $L(A)$ und $L(B)$ offene Teilmengen von $\mathbf{R}$. Wegen $(*)$ haben $L(A)$ und $L(B)$ höchstens *einen* Punkt gemeinsam $\implies L(A) \cap L(B) = \emptyset$.
(c) $A \cap B = \emptyset \implies 0 \notin B - A =: S$.
Beh.: S abgeschlossen.
Es genügt, $\overline{S} \subset S$ nachzuweisen. Sei also $x \in \overline{S}$. Dann gibt es ein Netz $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset S$ mit $x_\gamma \to x$. Hierbei ist, für alle $\gamma \in \Gamma$, $x_\gamma = a_\gamma - b_\gamma$ mit gewissen $a_\gamma \in A$, $b_\gamma \in B$. Da $(a_\gamma) \subset A$ und A kompakt, gibt es ein Teilnetz $(\tilde{a}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ von $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ und ein $a \in A$ mit $\tilde{a}_\delta \to a$.[1]
Sei $(\tilde{b}_\delta)_{\delta \in \Delta}$ das entsprechende Teilnetz von $(b_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$. Aus $\tilde{a}_\delta \to a$ und $\tilde{x}_\delta \to x$ folgt $\tilde{b}_\delta \to x - a$.
B abgeschlossen $\implies x - a \in B$
$\implies x \in A - B = S$. •
S abgeschlossen und $0 \notin S \implies \exists$ offene konvexe Nullumgebung U mit $U \cap S = \emptyset$.
Sei $A' := A + \frac{1}{2}U$, $B' := B - \frac{1}{2}U$. Dann sind A' und B' offen und kvx., mit $A' \cap B' = \emptyset$. Nach (b) können A' und B' durch eine Hyperebene strikt getrennt werden. Wegen $A' \subset A$ und $B' \subset B$ folgt dann die Beh. ∎

Bemerkung zum Beweis von Teil (a): Der reelle Satz von Hahn-Banach arbeitet mit (einseitigen) Ungleichungen $\ell(x) \leq p(x)$, bzw. $L(x) \leq p(x)$.

---

[1] Vgl. die (nicht bewiesene) Bemerkung im Anschluß an Thm. 1.2, oder [RS-I; p. 98f]. Wir verwenden hier nur die einfachere Richtung.

Einschub: Der Residuensatz.

(vgl. zB H Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques ...*”

E.1. Definition. Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet (d.h., D offen und zusammenhängend). Eine Funktion $f\colon D \to \mathbf{C}$ heißt *analytisch* (in D), wenn sich f lokal in eine Potenzreihe entwickeln läßt, d.h., wenn es zu jedem $z_0 \in D$ ein $r > 0$ gibt mit

$$\{z \in \mathbf{C}\,;\, |z - z_0| \le r\} \subset D$$

und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < r,$$

mit geeigneten Koeffizienten $a_n \in \mathbf{C}$, die der Bedingung

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty$$

genügen.

E.2. Bemerkung. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbf{C}$ heißt *holomorph*, wenn f in D (stetig) komplex differenzierbar ist.
Es gilt: f analytisch in $D \quad \Longleftrightarrow \quad f$ holomorph in D.

E.3. Theorem. (Cauchy’sche Integralformel)
Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet. Sei $a \in D$, und sei γ ein geschlossener Weg mit $a \notin \gamma$ (γ stetig und stückweise stetig diffbar), der sich in D homotop zu einem Punkt zusammenziehen läßt. Dann gilt für jede holomorphe Funktion $f\colon D \to \mathbf{C}$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a} \mathrm{d}z = I(\gamma, a) f(a);$$

dabei ist $I(\gamma, a)$ die Windungszahl von γ bezgl. a.

Bild!

Wenn f an isolierten Punkten singulär wird, so kann man f in eine *Laurentreihe* entwickeln: Sei f analytisch in der punktierten Kreisscheibe $\{z \in \mathbf{C}\,;\, 0 < |z| < r\}$. Dann gibt es $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}} \subset \mathbf{C}$ so, daß

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \qquad 0 < |z| < r; \tag{$*$}$$

hierbei konvergiert die Reihe in $(*)$ absolut und gleichmäßig in jedem Kreisring $\varepsilon \le |z| \le r - \varepsilon$, für alle $0 < \varepsilon < r/2$.

Die RS von $(*)$ nennt man eine *Laurent-Reihe.*
Sei nun γ der durch

$$[0,1] \ni t \mapsto \frac{1}{2} r e^{2\pi i t} \in \mathbf{C}$$

parametrisierte Weg in $\{z\,;\, 0 < |z| < r\}$. Man sieht leicht, daß

$$\int_\gamma a_n z^n \mathrm{d}z = 0, \qquad \mathbf{Z} \ni n \neq -1,$$

aber

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{a_{-1}}{z} \mathrm{d}z = a_{-1}.$$

Definition. Der Koeffizient a_{-1} in der Laurent-Entwicklung von f heißt *das Residuum von f an der Stelle* 0. Bez.: $\mathrm{Res}(f, 0)$.

E.4. Theorem. (Der Residuensatz.)
Sei $D \subset \mathbf{C}$ ein Gebiet und seien $z_1, \ldots, z_n$ (p.w. verschiedene) Punkte in D. Sei γ ein geschlossener, nullhomotoper Weg in D mit

$$z_k \notin \gamma \quad \text{und} \quad I(\gamma, z_k) = 1, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Dann gilt für alle in $D \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}$ holomorphen Funktionen f

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

Einfache Beispiele zur Berechnung des Residuums:
(a) Sei g holomorph in $\{z\,;\, |z| < 1\}$ mit $g(0) \neq 0$, und sei

$$f(z) := \frac{1}{z} g(z), \qquad 0 < |z| < 1.$$

Dann gilt $\mathrm{Res}(f, 0) = g(0) = \lim_{z \to 0} z f(z)$.
(b) Sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, P, Q holomorph in einer Umgebung des Punktes z_0, mit $P(z_0) \neq 0$ und z_0 einfache Nullstelle von Q. Dann gilt

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Eine Anwendung auf die Berechnung von Fouriertransformierten (vgl. [Cartan; p. 103 ff]):
Sei $D \subset \mathbf{C}$ offen, D umfasse die (abgeschlossene) obere Halbebene $\overline{H}$, und es seien $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{C}$ mit $\Im z_k > 0$ für $k = 1, \ldots, n$.

Es sei $f\colon D\setminus\{z_1,\dots,z_n\}\to\mathbf{C}$ analytisch und es gelte

$$M(r) := \sup_{\substack{|z|=r\\ Im z>0}} |f(z)| \to 0, \qquad r\to\infty.$$

Dann gilt

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}, z_j). \tag{$**$}$$

Bild!
Bem. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x$ braucht *nicht* absolut zu konvergieren!

Beweis von $(**)$**.** Für alle hinreichend großen $r>0$ gilt

$$\int_{\gamma(r)} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}\,(f\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}; z_j),$$

nach dem Residuensatz. Hierin ist $\gamma(r) = (\gamma(r)\cap\mathbf{R})\cup(\gamma(r)\cap H)$, wobei

$$\int_{\gamma(r)\cap\mathbf{R}} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z = \int_{-r}^{r} f(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x.$$

Daher genügt es,

$$\int_{\gamma(r)\cap H} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z \to 0, \qquad r\to\infty,$$

nachzuweisen: Parametrisiere dazu $\gamma(r)\cap H$ durch $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, $0<\vartheta<\pi$. Dann gilt zunächst

$$\left|\int_{\gamma(r)\cap H} f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z\right| \le M(r)\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-r\sin\vartheta}\cdot r\cdot\mathrm{d}\vartheta, \tag{$***$}$$

denn auf $\gamma(r)\cap H$ ist $|\mathrm{d}z| = r\mathrm{d}\vartheta$ und

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}r(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}r\cos\vartheta}\cdot\mathrm{e}^{-r\sin\vartheta},$$

mithin

$$|f(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}| \le |f(z)|\cdot\mathrm{e}^{-r\sin\vartheta}.$$

Es folgt weiter

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-r\sin\vartheta}r\mathrm{d}\vartheta &= 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-r\sin\vartheta}r\mathrm{d}\vartheta\\ &\le 2\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}r\vartheta}r\mathrm{d}\vartheta\\ &\le 2\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}r\vartheta}r\mathrm{d}\vartheta = \pi,\end{aligned}$$

denn für $0 < \vartheta < \pi/2$ gilt $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\vartheta}{\vartheta} \leq 1$.
Wegen $M(r) \to 0$ wenn $r \to \infty$, konvergiert daher die RS von $(***)$ gegen 0 mit $r \to \infty$.
$\blacksquare$

Einfaches Beispiel:

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+1}\mathrm{d}x\right)$$
$$= \pi\mathrm{i} \sum_{\xi\in H,\ \xi \text{ Polstelle}} \mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z^2+1};\xi\right).$$

In der oberen Halbebene H gibt es genau eine Polstelle $z = i$. Das Residuum an dieser Polstelle ist

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{2z}\Big|_{z=\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{ie}},$$

und wir erhalten schließlich

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi\mathrm{i}}{2\mathrm{ie}} = \frac{\pi}{2\mathrm{e}}.$$

Wenn der Integrand eine Polstelle 1. Ordnung auf der reellen Achse besitzt, verwendet man das folgende

Lemma. *Sei* 0 *eine* einfache *Polstelle der Fkt. g. Sei γ_ε der folgende Weg:*
Bild!!!
Dann gilt

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}\mathrm{Res}(g,0).$$

Beweis. Wir schreiben

$$g(z) = \frac{a}{z} + h(z),$$

mit $a \in \mathbf{C}$ und h holomorph in einer Nullumgebung. Dabei gilt

$$\int_{\gamma_\varepsilon} h(z)\mathrm{d}z \to 0, \qquad \varepsilon \to 0,$$

während

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{a}{z}\mathrm{d}z = \pi\mathrm{i}a.$$

$\blacksquare$

Anwendung auf das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ in den Übungen!