¶2. Topologische Grundbegriffe in metrischen Räumen. Der Satz von BAIRE.

2.1. Definition. Sei (M, d) ein MR.

(a) Für $y \in M$, $r > 0$ heißt $B_r(y) := \{x \in M \; ; \; d(x,y) < r\}$ die *(offene) Kugel um y mit Radius r.*

(b) Eine Menge $\mathcal{U} \subset M$ heißt *offen*, wenn es zu jedem $y \in \mathcal{U}$ ein $\varrho > 0$ gibt mit $B_\varrho(y) \subset \mathcal{U}$.

(c) Eine Menge $N \subset M$ heißt eine *Umgebung* eines Punktes $y \in M$, wenn es ein $\varrho > 0$ gibt mit $B_\varrho(y) \subset N$.

(d) Sei $E \subset M$. Ein Punkt $x \in M$ heißt ein *Häufungspunkt von* E, wenn es zu jedem $\varrho > 0$ einen Pkt. $y \in E$ gibt mit $x \neq y$ und $y \in B_\varrho(x)$.

(e) Eine Menge $F \subset M$ heißt *abgeschlossen*, wenn F alle seine Häufungspkte. enthält.

(f) Für $G \subset M$ heißt $x \in G$ ein *innerer Punkt*, wenn G eine Umgebung von x ist.

Wie in der reellen Analysis beweist man:

2.2. Theorem. *In einem metrischen Raum (M, d) gilt:*

(a) $\mathcal{O} \subset M$ offen $\iff$ $M \setminus \mathcal{O}$ abgeschlossen (im Sinne von Def. 2.1 (e)).

(b) $x_n \to_d x$ $\iff$ zu jeder Umgebung N von x $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in N$.

(c) Die Menge der inneren Punkte einer Menge G ist offen; Bez.: G°.

(d) Die Vereinigung einer Menge F mit ihren HPktn. ist abgeschlossen. Wir nennen diese Menge $\overline{F}$, die Abschließung von F. $\overline{F}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die F enthält.

(e) Eine Menge ist genau dann offen, wenn sie eine Umgebung eines jeden ihrer Punkte ist.

(f) Wenn (M, d) vollständiger MR ist und $A = \overline{A} \subset M$, dann ist (A, d) ein vollst. MR.

In der Einleitung hatten wir die allgemeine Definition für abgeschlossene Mengen, die Abschließung einer Menge, und die Stetigkeit von Abbildungen erwähnt. Die obigen Definitionen und Aussagen für den metrischen Fall sind damit konsistent. Das folgende Theorem etabliert zB die Äquivalenz von Def. 1.8 im metrischen Raum mit dem allgemeinen Stetigkeitsbegriff.

2.3. Theorem. *Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metr. Räume, und sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:*

(a) Wenn $(x_n) \subset X$ eine konvergente Folge ist, $x_n \to_{d_X} x$, so gilt $f(x_n) \to_{d_Y} f(x)$.

(b) Für alle offenen $\mathcal{O} \subset Y$ ist $f^{-1}(\mathcal{O})$ offen in X, d.h., f ist stetig.

(Beweis wie in $\mathbb{R}$.)

In allgemeineren als metrischen Räumen ist das Folgenkriterium zwar notwendig, aber i.a. nicht hinreichend für die Stetigkeit von f.

Zwei Metriken d, d' auf demselben Raum M heißen *äquivalent*, wenn sie dieselbe Topologie (d.h., dieselbe Familie von offenen Teilmengen) erzeugen.

2.4. Satz. *Seien (X, d) und (X, d') metrische Räume. Die Metriken d und d' sind genau dann äquivalent, wenn es zu jedem $x \in X$ und $r > 0$ ein $\varrho > 0$ gibt mit*

$$B_{\varrho}^{d'}(x) \subset B_r^d(x),$$

und wenn es zu jedem $x \in X$ und $s > 0$ ein $\sigma > 0$ gibt mit

$$B_{\sigma}^{d}(x) \subset B_s^{d'}(x).$$

Bemerkung. Die Metriken d und d' sind offenbar genau dann äquivalent, wenn die identische Abbildung

$$I\colon (X, d) \to (X, d')$$

stetig ist mit stetiger Inverser.

Der BAIREsche Kategoriesatz ist eine der tragenden Säulen der FA:

2.5. Theorem. (Baire-Hausdorff)
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum mit $X \neq \emptyset$. Weiter seien $A_j \subset X$, $j \in \mathbb{N}$, abgeschlossen mit

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Dann enthält (mindestens) ein A_j eine offene Menge $\neq \emptyset$.

Beweisidee: Beweis durch Widerspruch; wenn wir $X = \cup A_j$ annehmen mit $A_j = \overline{A}_j$ und $A_j^\circ = \emptyset$, $\forall j \in \mathbb{N}$, so können wir eine Cauchyfolge $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ konstruieren, die "außerhalb der A_j" verläuft in dem Sinne, daß

$$x_m \notin \cup_{j=1}^m A_j,$$

und deren Limes x in keinem A_j liegt. Dabei ist A° wieder das Innere der Menge A wie in Thm. 2.2.

Beweis.
Widerspruchsannahme: $\forall j \in \mathbb{N} : A_j^\circ = \emptyset$.
Wegen $A_1^\circ = \emptyset$ und $X^\circ = X \neq \emptyset$ ist $A_1 \neq X$. Daher gibt es ein $x_1 \in X$ mit $x_1 \notin A_1$; wegen $A_1 = \overline{A}_1$ gibt es dann aber sogar eine Kugel $B(x_1, r_1) =: B_1$ mit $r_1 > 0$ und

$$B_1 \cap A_1 = \emptyset.$$

O.E. sei $r_1 \leq 1$. Weil auch $A_2^\circ = \emptyset$ ist, gilt $B_1 \not\subset A_2$, und es gibt ein $x_2 \in B_1 \setminus A_2$. Wegen $A_2 = \overline{A}_2$ exist. daher sogar ein $r_2 > 0$ mit

$$B_2 := B(x_2, r_2) \subset B_1 \setminus A_2.$$

O.E. dürfen wir $0 < r_2 \leq 1/2$ und

$$\overline{B_2} \subset B_1$$

annehmen (denn für $0 < \varrho < r$ ist $\overline{B}(x, \varrho) \subset B(x, r)$).
Induktiv verschaffen wir uns so für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, Punkte

$$x_n \in B_{n-1} \setminus A_n$$

und offene Kugeln $B_n := B(x_n, r_n)$ mit

$$\overline{B_n} \subset B_{n-1}, \qquad B_n \cap A_n = \emptyset, \qquad 0 < r_n \leq 2^{1-n}.$$

Die x_n bilden eine CF, denn aus $n, m > N$ folgt $x_n, x_m \in B_N$, also

$$d(x_n, x_m) \le d(x_n, x_N) + d(x_N, x_m) \le 2^{1-N} + 2^{1-N} = 2^{2-N} \to 0, \quad N \to \infty.$$

X vollständig $\Longrightarrow \exists x \in X \colon x_n \to_d x$.
Wegen $x_n \in B_N$, für $n \ge N$, folgt weiter $x \in \overline{B_N} \subset B_{N-1}$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $N \ge 2$.
$\Longrightarrow \quad x \notin A_{N-1}$, $\forall N = 2, 3, \ldots$,
$\Longrightarrow \quad x \notin \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = X$,
also Widerspruch! ∎

Bemerkungen.
(a) In Extremfällen liefert der Satz von Baire keine neuen Erkenntnisse, etwa bei einem einpunktigen metrischen Raum oder wenn man es mit der diskreten Metrik zu tun hat.
(b) Die Mengen A_j brauchen *nicht* paarweise disjunkt zu sein!

2.6. Definition. Eine Teilmenge A eines metrischen Raumes (X, d) heißt
- *nirgends dicht*, falls $\overline{A}$ keine inneren Punkte enthält (d.h., falls $(\overline{A})^\circ = \emptyset$).
- *mager*, oder: *von erster Kategorie*, falls $A = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ und A_j nirgends dicht, $\forall j \in \mathbb{N}$.
- von *zweiter Kategorie*, falls nicht von erster Kategorie.

Den Satz von Baire kann man dann wie folgt formulieren:
"Ein vollständiger metrischer Raum (X, d) mit $X \ne \emptyset$ ist von 2. Kategorie."

Bemerkungen. Anwendungen: Uniform Boundedness Principle, Open mapping theorem, nirgends diffbare Fktn., Funktionen, deren Fourierreihe in mindestens einem Punkt divergiert, ...

Als Beispiel wollen wir zeigen, daß die Menge der Funktionen $f \in (C[0,1], d_\infty)$, die nirgends differenzierbar sind, von 2. Kategorie ist.

2.7. Beispiel. Die Menge der stetigen Funktionen $f \in C[0,1]$, die in keinem Punkte differenzierbar sind, ist von zweiter Kategorie (also insbes. $\ne \emptyset$) als Teilmenge des metrischen Raumes $(C[0,1], d_\infty)$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$M_n := \Big\{ f \in C[0,1] : \exists t \in [0,1]\ \forall x \in [0,1] \colon |f(x) - f(t)| \le n\,|x - t| \Big\}.$$

(i) *Behauptung:* M_n ist abgeschlossen.

Bew.: Sei $(f_m) \subset M_n$ mit $f_m \to_{d_\infty} f \in C[0,1]$. Zu zeigen: $f \in M_n$.
Nach Definition der M_n gibt es zu jedem m ein $t_m \in [0,1]$ mit

$$|f_m(x) - f_m(t_m)| \le n|x - t_m|, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Da das Intervall $[0,1]$ kompakt ist, besitzt die Folge (t_m) eine konvergente TF. O.E. dürfen wir daher annehmen, daß $t_m \to t_0$ gilt mit einem $t_0 \in [0,1]$. Dann rechnet man für ein bel. $x \in [0,1]$ nach:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t_0)| &= \left| \lim_{m\to\infty} f_m(x) - \lim_{m\to\infty} f_m(t_0) \right| \\ &= \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_m(t_0)| \\ &\le \limsup_{m\to\infty} \{|f_m(x) - f_m(t_m)| + |f_m(t_m) - f_m(t_0)|\} \\ &\le \limsup_{m\to\infty} \{n|x - t_m| + n|t_m - t_0|\} \\ &= n|x - t_0|. \end{aligned}$$

(ii) *Behauptung:* M_n enthält keine inneren Punkte.
Bew.: Sei $f \in M_n$ und $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, daß es ein $g \in C[0,1]$ gibt mit $d_\infty(f,g) < \varepsilon$ und $g \notin M_n$.
Nach Weierstraß gibt es zu f ein Polynom p mit $d(f,p) < \varepsilon/2$. Sei $m_0 := \max_{[0,1]} |p'(x)|$. Weiter gibt es eine stetige, stückweise lineare Funktion (eine “Zackenfunktion”) $z(x)$ mit $|z(x)| < \varepsilon/2$ für alle $x \in [0,1]$ und $|z'(x)| > n + m_0$ für alle $x \in [0,1]$ bis auf endlich viele. Setze $g := p + z$. Dann gilt offenbar $d_\infty(f,g) < \varepsilon$.
Weiter gibt es zu jedem $t \in [0,1]$ ein $x_t \in [0,1]$ mit $|z(x_t) - z(t)| > (n + m_0)|x_t - t|$, und damit folgt (unter Verwendung der “umgekehrten Dreiecksungleichung”), daß

$$|g(x_t) - g(t)| \ge |z(x_t) - z(t)| - |p(x_t) - p(t)| > (n + m_0)|x_t - t| - m_0|x_t - t| = n|x_t - t|,$$

denn nach dem MWSdDR ist $|p(x_t) - p(t)| \le (\max_{0\le s\le 1} |p'(s)|)|x_t - t| = m_0|x_t - t|$. Also gilt $g \notin M_n$.
(iii) *Behauptung:* Die Menge $\mathcal{D} \subset C[0,1]$ der Funktionen, die in *mindestens einem* Punkt $t \in [0,1]$ differenzierbar sind, ist von 1. Kategorie.
Bew.: Sei $f \in \mathcal{D}$, d.h., f diffbar in mindestens einem Punkt t. Dann ist die Abb.

$$x \mapsto \frac{|f(x) - f(t)|}{|x - t|}, \qquad x \ne t,$$

stetig in t ergänzbar, also insbesondere beschränkt. Daher ist $f \in M_n$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$, und es folgt

$$\mathcal{D} \subset \cup_{n=1}^{\infty} M_n;$$

insbesondere ist daher $\mathcal{D}$ Teilmenge einer Menge der 1. Kat. Damit folgt aber sofort, daß auch $\mathcal{D}$ selbst von 1. Kat. ist: Mit $D_n := \mathcal{D} \cap M_n$ gilt $\mathcal{D} = \cup_{n=1}^{\infty} D_n$ und

$$\operatorname{int}(\overline{D_n}) = \operatorname{int}(\overline{M_n \cap \mathcal{D}}) \subset \operatorname{int}(\overline{M_n} \cap \overline{\mathcal{D}}) \subset \operatorname{int}(\overline{M_n}) = \operatorname{int}(M_n) = \emptyset.$$

(*iv*) *Behauptung:* Die Menge der nirgends differenzierbaren Funktionen ist von zweiter Kategorie.
Bew.: Der Raum $(C[0,1], d_\infty)$ ist vollständig und $C[0,1] \neq \emptyset$; nach dem Satz von Baire ist daher $C[0,1]$ von 2. Kat. Nach (*iii*) ist $\mathcal{D}$ von 1. Kat., also muß $C[0,1] \backslash \mathcal{D}$ von 2. Kat. sein (vgl. ÜA 13). ∎

Genauer ist die Menge derjenigen Funktionen, die zumindest in *einem* Punkt beschränkte Differenzenquotienten besitzen, eine magere Teilmenge von $C[0,1]$. Dies ist genau die Menge derjenigen Funktionen, die in mindestens *einem* Punkt einer Lipschitz-Bedingung genügen.

Kompaktheit in metrischen Räumen.

2.8. Definition. Eine Teilmenge K eines topologischen Raumes (X, τ) heißt *kompakt*, wenn folgende Bed. erfüllt ist: Zu *jeder* offenen Überdeckung von K,

$$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$$

mit $\mathcal{U}_\alpha \subset M$ offen, A Indexmenge, gibt es ein *endliches* Teilsystem $\mathcal{U}_{\alpha_1}, \ldots, \mathcal{U}_{\alpha_N}$ mit

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathcal{U}_{\alpha_j}.$$

2.9. Satz. *Sei (M,d) metr. Raum, $K \subset M$. Dann gilt:*
K ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subset K$ eine konvergente Teilfolge mit Limes $\in K$ besitzt.

(Beweis wie im $\mathbb{R}^n$)

2.10. Theorem. (Arzelà-Ascoli)
Sei $(f_n) \subset C[0,1]$ mit:
(*i*) *Die Funktionen f_n sind* gleichmäßig beschränkt, *d.h.,*

$$\exists c \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] :\ |f_n(x)| \leq c; \tag{2.1}$$

(*ii*) *Die Funktionen* f_n *sind* gleichgradig (gleichmäßig) stetig, *d.h.,*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x, y \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}\colon\ (|x-y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon). \tag{2.2}$$

Dann gibt es eine TF $(f_{n_j}) \subset (f_n)$ *und ein* $f \in C[0,1]$ *mit*

$$d_\infty(f_{n_j}, f) \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Bemerkungen.

(a) Verallgemeinerung auf $(f_n) \subset C(X)$, X kompakter metrischer Raum.

(b) Integraloperatoren besitzen häufig Kompaktheitseigenschaften, so etwa die Lösungsoperatoren für elliptische Partielle Differentialoperatoren auf beschränkten Gebieten.

(c) "gleichgradig stetig" heißt im Englischen "equi-continuous"

Beweis.

(1) Wegen $(C[0,1], d_\infty)$ vollständig (vgl. ÜA 5) genügt es zu zeigen, daß (f_n) eine Teilfolge besitzt, die sich der Cauchyeigenschaft bzgl. der Metrik d_∞ erfreut.

(2) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es dann ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ so, daß in jedem Intervall $(x-\delta, x+\delta)$ mindestens einer der Punkte $x_1, \ldots, x_{N_\delta}$ liegt.

(*Beweis hierzu:* Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $2^{-m} < \delta$. Wähle N_δ so groß, daß alle Zahlen der Form $j \cdot 2^{-m}$, $j = 0, \ldots, 2^m$, unter den $x_1, \ldots, x_{N_\delta}$ vorkommen.)

(3) Die Folge $(f_n(x_1))_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt, besitzt also einen HP. $\Longrightarrow$ Es gibt TF $\big(f_{n_1(i)}\big)_{i\in\mathbb{N}} \subset (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so, daß $\big(f_{n_1(i)}(x_1)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist; dabei ist $n_1\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $n_1(i+1) > n_1(i)$, für alle $i \in \mathbb{N}$.

Analog findet man eine TF

$$\big(f_{n_2(i)}\big)_{i\in\mathbb{N}} \subset \big(f_{n_1(i)}\big)_{i\in\mathbb{N}}$$

mit $\big(f_{n_2(i)}(x_2)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ CF. Dabei ist $n_2\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend mit $\{n_2(i)\,;\, i \in \mathbb{N}\} \subset \{n_1(i)\,;\, i \in \mathbb{N}\}$.

Induktion ergibt: $\forall k \in \mathbb{N}$ gibt es Teilfolgen

$$\big(f_{n_k(i)}\big)_{i\in\mathbb{N}} \subset \big(f_{n_{k-1}(i)}\big)_{i\in\mathbb{N}}$$

mit $\big(f_{n_k(i)}(x_k)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ CF. Offenbar ist dann $\big(f_{n_k(i)}(x_j)\big)_{i\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge für alle $j = 1, \ldots, k$.

Betrachte nun die *Diagonalfolge*

$$\big(\tilde{f}_i\big)_{i\in\mathbb{N}} := \big(f_{n_i(i)}\big)_{i\in\mathbb{N}}\,; \tag{2.3}$$

beachte die Kopplung der Indizes i auf der rechten Seite! Nach Konstruktion ist die Teilfolge $\left(\tilde{f}_i\right)_{i\geq k}$ eine Teilfolge von $\left(f_{n_k(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$. Daher ist $\left(\tilde{f}_i(x_k)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge.

(4) Wir zeigen schließlich, daß $(\tilde{f}_i)$ eine Cauchyfolge im MR $(C[0,1], d_\infty)$ bildet:

Zu vorgeg. $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ gemäß der Vorauss. (2.2). Weiter sei N_δ zu δ gewählt gemäß Punkt (2) dieses Beweises.

Sei nun $y \in [0,1]$ beliebig. Nach (2) gibt es einen Index $k_y \leq N_\delta$ mit $|y - x_{k_y}| < \delta$. Wir schätzen nun ab

$$\begin{aligned}\left|\tilde{f}_i(y) - \tilde{f}_j(y)\right| \leq \left|\tilde{f}_i(y) - \tilde{f}_i(x_{k_y})\right| + \left|\tilde{f}_i(x_{k_y}) - \tilde{f}_j(x_{k_y})\right| \\ + \left|\tilde{f}_j(x_{k_y}) - \tilde{f}_j(y)\right|, \qquad \forall i,j \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Hierin ist wegen (2.2) und $|y - x_{k_y}| < \delta$

$$\left|\tilde{f}_i(y) - \tilde{f}_i(x_{k_y})\right| < \varepsilon, \qquad \left|\tilde{f}_j(x_{k_y}) - \tilde{f}_j(y)\right| < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Da $\left(\tilde{f}_i(x_k)\right)_{i\in\mathbb{N}}$ CF für alle $k = 1, \ldots, N_\delta$, gibt es ein $M = M(\varepsilon, N_\delta) \in \mathbb{N}$ mit

$$\left|\tilde{f}_i(x_k) - \tilde{f}_j(x_k)\right| < \varepsilon, \qquad \forall k = 1, \ldots, N_\delta, \quad \forall i,j \geq M. \tag{2.6}$$

Wegen $k_y \leq N_\delta$ gilt diese Abschätzung insbesondere auch für x_{k_y}. Daher folgt aus (2.4)

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M \in \mathbb{N},\ \forall i,j \geq M,\ \forall y \in [0,1]\text{:}\ \left|\tilde{f}_i(y) - \tilde{f}_j(y)\right| < 3\varepsilon.$$

∎

Anwendung: Integraloperatoren (Übungen).

Bemerkung. Die gleichgradige Stetigkeit folgt zB aus der (gleichmäßigen) Lipschitzstetigkeit der Folge (f_n),

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq L|x - y|, \qquad \forall x,y \in [0,1], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Wenn die f_n sogar stetig differenzierbar sind, $f_n \in C^1(0,1)$, und einer Abschätzung

$$|f_n'(x)| \leq C, \qquad \forall x \in (0,1), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{$**$}$$

genügen, so folgt $(*)$ mit $L := C$. Insbesondere sind die f_n dann gleichgradig stetig.

Bemerkung. "Moderne" Varianten des Satzes von Arzelá und Ascoli sind:
(a) Der Satz von Fréchet und Kolmogoroff [Y] (Kompaktheit in $L_1(\mathbb{R})$)
(b) Der Kompaktheitssatz von Rellich (Kompaktheit in Sobolevräumen, die zugleich Hilberträume sind)
(c) Der Kompaktheitssatz von Kondratschoff (Kompaktheit in allgemeinen Sobolevräumen)

Zum Abschluß dieses Paragraphen beweisen wir noch Thm. 1.10.

1.10. Theorem. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{X}, \tilde{d})$ und eine (injektive) isometrische Abb.*

$$J : X \to \tilde{X}$$

mit dichtem Bild, d.h., $J(X)$ ist dicht in $\tilde{X}$. Der Raum $\tilde{X}$ ist eindeutig bestimmt bis auf isometrische Isomorphien.

Bem.: Solche Isomorphismen benötigt man bereits, wenn man verschiedene Vervollständigungen von $\mathbb{Q}$ betrachtet. Es ist einfach, einen solchen Isomorphismus zwischen den Dezimaldarstellungen der reellen Zahlen und den Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen rationaler Zahlen explizit anzugeben.

Die Hauptschwierigkeit im Beweis liegt darin, daß man auf 4 Ebenen agiert:
(1) Punkte $x \in X$; (2) Cauchyfolgen (x_n);
(3) Äquivalenzklassen von Cauchyfolgen $[(x_n)]$; (4) Cauchyfolgen von Äquivalenzklassen.

Beweis. (vgl. [Y; p. 56/57])
(1) Auf $\mathcal{F}(X) :=$ Menge der Cauchyfolgen in X betrachte die Ä-Relation $\sim$

$$(x_n) \sim (y_n) \quad :\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0. \tag{2.7}$$

Sei $\tilde{X} := \mathcal{F}(X)/\sim$ die Menge der Ä.-Klassen von Cauchyfolgen in X, und sei $[(x_n)] \in \tilde{X}$ die Klasse, die die Cauchyfolge $(x_n) \in \mathcal{F}(X)$ enthält.

Wir definieren eine Funktion $\tilde{d}: \tilde{X} \times \tilde{X} \to [0, \infty)$ durch

$$\tilde{d}\,([(x_n)], [(y_n)]) := \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n). \tag{2.8}$$

(Bem.: An dieser Stelle verwenden wir die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.)

Man sieht leicht, daß der Limes auf der RS von (2.8) existiert und nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt; weiter besitzt $\tilde{d}$ wieder die Eigenschaften einer Metrik (ÜA).

(2) Wir zeigen nun, daß $\left(\tilde{X}, \tilde{d}\right)$ vollständig ist.

Sei dazu $(\tilde{x}_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \tilde{X}$ eine Cauchyfolge in $\left(\tilde{X}, \tilde{d}\right)$. Wir wählen für jedes $k \in \mathbb{N}$ einen Repräsentanten $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X)$, d.h.,

$$\tilde{x}_k = \left[\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right].$$

Jedes $\left(x_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchyfolge in X und es gibt ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$d\left(x_m^{(k)}, x_{n_k}^{(k)}\right) < 1/k, \qquad m \geq n_k. \tag{2.9}$$

Setze

$$\hat{x} := \left(x_{n_1}^{(1)}, x_{n_2}^{(2)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}, \ldots\right) = \left(x_{n_k}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}. \tag{2.10}$$

Beh.: $\hat{x}$ ist Cauchyfolge in X.

Bew. der Beh.: Sei $\overline{x}_{n_k}^{(k)} \in \tilde{X}$ die Klasse, die die konstante Folge

$$\left(x_{n_k}^{(k)}, x_{n_k}^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}, \ldots\right)$$

enthält. Wegen (2.9) gilt dann für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{d}\left(\tilde{x}_k, \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right) = \lim_{m\to\infty} d(x_m^{(k)}, x_{n_k}^{(k)}) \leq 1/k, \tag{2.11}$$

mithin

$$\begin{aligned} d\left(x_{n_k}^{(k)}, x_{n_m}^{(m)}\right) &= \tilde{d}\left(\overline{x}_{n_k}^{(k)}, \overline{x}_{n_m}^{(m)}\right) \\ &\leq \tilde{d}\left(\overline{x}_{n_k}^{(k)}, \tilde{x}_k\right) + \tilde{d}\left(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m\right) + \tilde{d}\left(\tilde{x}_m, \overline{x}_{n_m}^{(m)}\right) \\ &\leq 1/k + \tilde{d}\left(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m\right) + 1/m. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wegen $(\tilde{x}_k)$ Cauchyfolge, folgt die Beh.

Wir zeigen nun noch $\tilde{d}\left(\tilde{x}_k, [\hat{x}]\right) \to 0$, mit $k \to \infty$: Zunächst gilt wegen (2.11)

$$\begin{aligned} \tilde{d}\left(\tilde{x}_k, [\hat{x}]\right) &\leq \tilde{d}\left(\tilde{x}_k, \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right) + \tilde{d}\left(\overline{x}_{n_k}^{(k)}, [\hat{x}]\right) \\ &\leq 1/k + \tilde{d}\left(\overline{x}_{n_k}^{(k)}, [\hat{x}]\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Weil $(\tilde{x}_k)$ Cauchyfolge in $\tilde{X}$ gibt es ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $1/N_\varepsilon < \varepsilon$ und

$$\tilde{d}\left(\tilde{x}_p, \tilde{x}_k\right) < \varepsilon, \qquad \forall k, p \geq N_\varepsilon.$$

Dann gilt für $k \geq N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\tilde{d}\left([\hat{x}], \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right) &= \lim_{p\to\infty} d\left(x_{n_p}^{(p)}, x_{n_k}^{(k)}\right) \\ &\leq_{(2.12)} \limsup_{p\to\infty}\left(1/p + \tilde{d}\left(\tilde{x}_p, \tilde{x}_k\right) + 1/k\right) \leq \varepsilon + 1/k < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Wir erhalten damit

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{d}\left([\hat{x}], \overline{x}_{n_k}^{(k)}\right) = 0,$$

also, mit (2.13),

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{d}\left([\hat{x}], \tilde{x}_k\right) = 0.$$

(3) Wir definieren die Abb. $J : X \to \tilde{X}$ durch

$$X \ni x \mapsto J(x) := [(x, x, \ldots, x, \ldots)] = \overline{x}.$$

J ist injektiv und isometrisch.

(4) Wir wollen zum Schluß noch zeigen, daß alle Vervollständigungen zueinander isometrisch isomorph sind. Es seien also $(\tilde{X}_i, \tilde{d}_i)$, $i = 1, 2$, vollständige metrische Räume mit denselben Eigenschaften wie $(\tilde{X}, \tilde{d})$, d.h., es gibt isometrische Abbildungen

$$J_i\colon X \to \tilde{X}_i$$

mit dichtem Bild $Y_i := J_i(X)$, für $i = 1, 2$. Dann ist

$$j := J_2 \circ J_1^{-1}\colon Y_1 \to Y_2$$

ein isometrischer Isomorphismus. Wegen der Dichtheit von Y_i in $\tilde{X}_i$ besitzt j eine (eindeutig bestimmte) Fortsetzung zu einem isometrischen Isomorphismus $\tilde{j}\colon \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ (einfache Übungsaufgabe). ∎

Zusätzlich kann man weitere Strukturen von X auf $\tilde{X}$ übertragen (Linearität, Normen, Skalarprodukt; vgl. später!)