Kapitel I. Lokalkonvexe topologische Vektorräume.

In diesem Kapitel behandeln wir lokal-konvexe topologische Vektorräume, darunter auch solche mit metrischer Topologie. Solche Räume sind insbesondere für die Fouriertransformation von Bedeutung.

Motivation: Betrachte den Raum $C(\mathbf{R})$ und die Familie von Halbnormen

$$p_k(f) := \max_{|x|\le k} |f(x)|, \quad f \in C(\mathbf{R}), \qquad k \in \mathbf{N}.$$

¶1. Wiederholung topologischer Begriffe. (vgl. [RS-I; pp. 90 ff])

1.1. Definition. Ein *topologischer Raum* ist eine Menge S mit einer Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen von S, die wir *offene Mengen* nennen, mit den folgenden Eigenschaften:
(i) **endliche** Durchschnitte offener Mengen sind offen;
(ii) **beliebige** Vereinigungen offener Mengen sind offen;
(iii) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $S \in \mathcal{T}$.
Das Mengensystem $\mathcal{T}$ nennt man dann eine *Topolgie* auf S, das Paar $(S, \mathcal{T})$ einen *topologischen Raum.*

1.2. Beispiel. Jeder metrische Raum (X, d) ist in natürlicher Weise ein topologischer Raum: Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt genau dann offen, wenn es zu jedem $x \in M$ ein $r > 0$ gibt mit $\{y \in X\ ;\ d(x,y) < r\} \subset M$.

Die Topologien auf einer Menge S besitzen eine natürliche Ordnungsstruktur (Halbordnung): Man sagt, die Topologie $\mathcal{T}_1$ ist *schwächer* (oder auch *gröber* oder *kleiner*) als die Topologie $\mathcal{T}_2$, wenn $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ gilt.

1.3. Definition. Eine Teilmenge $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt eine *Basis der Topologie* $\mathcal{T}$, wenn sich jedes $T \in \mathcal{T}$ in der Form

$$T = \cup_{\alpha\in A} B_\alpha$$

mit geeigneten $B_\alpha \in \mathcal{B}$ und einer Indexmenge A schreiben läßt.

1.4. Beispiel. Die Menge aller Kugeln in einem metrischen Raum bildet eine Basis für die durch die Metrik induzierte Topologie.

1.5. Definition. Sei S ein topol. Raum, $x \in S$. Eine Teilmenge $N \subset S$ heißt eine *Umgebung von* x, wenn es eine offene Menge U gibt mit $x \in U \subset N$.

1.6. Definition. Sei S ein topol. Raum, $x \in S$. Eine Familie $\mathcal{N}$ von Teilmengen von S heißt eine *Umgebungsbasis von* x, wenn jedes $N \in \mathcal{N}$ eine Umgebung von x ist und wenn es zu jeder Umgebung M von x ein $N \in \mathcal{N}$ gibt mit $N \subset M$.

1.7. Beispiel. In einem metrischen Raum bilden die (offenen oder abgeschlossenen) Kugeln um den Punkt x eine Umgebungsbasis. Die Menge der Kugeln um x mit *rationalen Radien* bildet eine *abzählbare* Umgebungsbasis.

1.8. Definition. Eine Teilmenge eines topolog. Raumes heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist. Der *Abschluß* einer Menge A ist die kleinste abgeschl. Menge, die A enthält. Das *Innere* von A ist die größte offene Menge, die in A enthalten ist.

Stetige Abbildungen spielen eine fundamentale Rolle in topologischen Räumen:

1.9. Definition. Seien $(S, \mathcal{T})$ und $(T, \mathcal{U})$ topolog. Räume. Eine Abb. $f : S \to T$ heißt *stetig*, wenn die Urbildmenge $f^{-1}[U] \in \mathcal{T}$ ist für alle $U \in \mathcal{U}$. Die Abb. f heißt *offen*, wenn $f[B] \in \mathcal{U}$ ist für alle $B \in \mathcal{T}$. Wenn f bijektiv, offen und stetig ist, so heißt f ein *Homöomorphismus*.

Man kann auch umgekehrt Funktionenfamilien verwenden, um eine Topologie zu erzeugen:

1.10. Definition. Sei $\mathcal{K}$ eine Familie von Abbildungen von einer Menge S in einen topologischen Raum $(T, \mathcal{U})$. Die *$\mathcal{K}$-schwache Topologie auf* S ist die schwächste (d.h., die gröbste, oder kleinste) Topologie auf S, für die alle Funktionen $f \in \mathcal{K}$ stetig sind.

Um die $\mathcal{K}$-schwache Topologie auf S zu konstruieren, betrachtet man die Familie $\mathcal{N}$, die alle endlichen Durchschnitte von Mengen der Form $f^{-1}[U]$ mit $f \in \mathcal{K}$ und $U \in \mathcal{U}$ enthält. Dann ist $\mathcal{N}$ eine Basis für die $\mathcal{K}$-schwache Topologie auf S. (ÜA ??)

Bem.: Verallgemeinerung auf den Fall, wo die Funktionen $f \in \mathcal{K}$ in verschiedene topolog. Räume abbilden; vgl. Beispiel 1.12.

1.11. Beispiel. Sei X ein Banachraum. Die *schwache Topologie auf* X ist die schwächste Topologie, für die alle Funktionale $\lambda \in X'$ stetig sind. Eine Umgebungsbasis der Null besteht z.Bp. aus den Mengen

$$N(\psi_1, \dots, \psi_n; \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) := \{x \in X \; ; \; |\psi_i(x)| < \varepsilon_i, \; i = 1, \dots, n\},$$

mit positiven ε_i, beliebigen $\psi_i \in X'$, und $n \in \mathbf{N}$. Dies sind *"Zylindermengen"* mit endlich-dimensionalem Querschnitt.

1.12. Beispiel. Kartesische Produkte topologisiert man meist mit Hilfe der schwachen Topologie, die von den Projektionen auf die einzelnen Koordinaten erzeugt wird: Wenn $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Mengen ist, dann ist $S = \times_{\alpha \in A} S_\alpha$ die Menge aller $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ mit $x_\alpha \in A_\alpha$. Für jedes $\beta \in A$ gibt es eine Projektionsabbildung

$$\pi_\beta : S \to S_\beta, \qquad \pi_\beta((x_\alpha)_{\alpha \in A}) := x_\beta.$$

Wenn jede der Mengen S_α mit einer Topologie $\mathcal{T}_\alpha$ versehen ist, so nennen wir die schwache Topologie, die auf dem Produktraum S von den Projektionen π_α erzeugt wird, die *Produkttopologie* und schreiben $\times_{\alpha \in A} \mathcal{T}_\alpha$.

1.13. Definition. Ein topol. Raum $(S, \mathcal{T})$ heißt ein *Hausdorff-Raum*, wenn es zu $x \neq y \in S$ offene Mengen $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ gibt mit $x \in U_1$, $y \in U_2$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Netze und Konvergenz in topol. Räumen.

Der Begriff *Netz* verallgemeinert den Begriff der *Folge.* Viele grundlegende Sätze aus der reellen Analysis behalten ihre Gültigkeit in allgemeinen topolog. Räumen, wenn man das Wort "Folge" durch das Wort "Netz" ersetzt. Beispielsweise ist eine Abb. zwischen topol. Räumen genau dann stetig, wenn sie konvergente Netze auf konvergente Netze abbildet. Oder: Ein topolog. Raum ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz ein konvergentes Teilnetz besitzt.

1.14. Definition. Eine *gerichtete Menge* ist eine Menge M versehen mit einer Halbordnung $\prec$, die die folgende Eigenschaft besitzt:
Zu $\alpha, \beta \in M$ existiert ein $\gamma \in M$ mit $\alpha \prec \gamma$ und $\beta \prec \gamma$.

BILD !!!
(Insbesondere besitzen dann endliche Teilmengen stets eine obere Schranke.)

1.15. Definition. Ein *Netz* (oder eine *verallgemeinerte Folge*) in einem topolog. Raum S ist eine Abbildung von einem gerichteten System A nach S. Wir schreiben dann $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Die natürlichen Zahlen bilden mit der üblichen $\geq$-Ordnung ein gerichtetes System; Netze mit $\mathbf{N}$ als Indexmenge sind daher gerade die Folgen in S. Der Begriff "Netz" verallgemeinert also den Begriff der "Folge."

• Wenn eine Aussage $\mathcal{P}$ von $\alpha \in A$ abhängt, mit A gerichtete Menge, so sagen wir, daß $\mathcal{P}$ *schließlich wahr* (engl.: "eventually true") ist, wenn es ein $\beta \in A$ so gibt, daß $\mathcal{P}(\alpha)$ wahr ist *für alle* $\alpha \succ \beta$.
• Die Aussage $\mathcal{P}(\alpha)$ ist *häufig wahr* (engl.: "frequently true"), wenn es zu jedem $\beta \in A$ ein $\alpha \succ \beta$ so gibt, daß $\mathcal{P}(\alpha)$ wahr ist.

1.16. Definition. Sei $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz in S. (x_α) *konvergiert gegen* $x \in S$ genau dann, wenn es zu jeder Umgebung N von x ein $\beta \in A$ gibt mit $x_\alpha \in N$ für alle $\alpha \succ \beta$. Wir schreiben dann $x_\alpha \to x$. (Hier ist also für jede Umgebung N von x die Aussage $x_\alpha \in \mathbf{N}$ schließlich wahr.)
x heißt *Häufungspunkt* des Netzes $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, wenn es zu jeder Umgebung N von x und jedem $\beta \in A$ ein $\alpha \in A$ gibt mit $x_\alpha \in N$.

1.17. Theorem. *Sei S ein topolog. Raum, $M \subset S$ eine Teilmenge von S. Ein Punkt $x \in S$ gehört genau dann zum Abschluß von M, wenn es ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset M$ gibt mit $x_\alpha \to x$.*

Vorbemerkung zum Beweis. $\overline{M}$ besteht aus den Punkten $x \in S$ mit der Eigenschaft, daß jede Umgebung von x einen Punkt aus M enthält. Diese Menge enthält M; ihr Komplement ist die größte offene Menge, die keine Punkte von M enthält.

Beweis. Sei $x_\alpha \to x$, mit $x_\alpha \in M$ für alle $\alpha \in A$. Wegen $x_\alpha \to x$ enthält jede Umgebung von x einen Punkt x_α; $\implies$ $x \in \overline{M}$.

Sei umgekehrt $x \in \overline{M}$. Sei A die Menge der Umgebungen von x mit der Halbordnung

$$N_1 \prec N_2 :\Longleftrightarrow N_2 \subset N_1.$$

Für jedes $N \in A$ wähle $x_N \in M \cap N$; ein solcher Punkt existiert, da $x \in \overline{M}$. Dann ist $(x_N)_{N \in A}$ ein Netz in M mit $x_N \to x$. ∎

In metrischen Räumen kann man die Abschließung einer Menge mittels Folgen konstruieren. In allgemeineren topolog. Räumen sind aber Folgen für diesen Zweck unzureichend:

1.18. Beispiel. Sei $S := [0,1] \subset \mathbf{R}$. Wir erklären eine Topologie auf S in der folgenden Weise: Eine Menge $U \subset S$, $U \neq \emptyset$, heiße *offen* $\Longleftrightarrow$ U^C enthält höchstens abzählbar viele Punkte.
Sei $B := [0,1)$. Da die Menge $\{1\}$ nicht offen ist, folgt $\overline{B} = S$.
Andrerseits gibt es aber *keine* Folge $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset B$ mit $x_n \to 1$: Zunächst ist $U := \{x_n \; ; \; n \in \mathbf{N}\}^C$ nach Definition der Topologie auf S offen. Wegen $x_n \neq 1$, $n \in \mathbf{N}$, ist U daher eine offene Umgebung der Menge $\{1\}$, mit $x_n \notin U$, für alle $n \in \mathbf{N}$. Also kann die Folge $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ nicht gegen 1 konvergieren.

1.19. Theorem. (vgl. ÜA ???)
(a) Seien S und T topologische Räume. Eine Abb. $f : S \to T$ ist genau dann stetig, wenn f konvergente Netze (aus S) auf konvergente Netze (in T) abbildet.
(b) Sei S ein Hausdorff-Raum. Dann besitzt jedes Netz höchstens einen Grenzwert, d.h., $x_\alpha \to x$ und $x_\alpha \to y$ impliziert $x = y$.

Was ist eine Teilfolge einer Folge?
$(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ist Teilfolge der Folge $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ genau dann, wenn es eine streng monotone Abbildung $F \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ gibt mit $x_k = y_{F(k)}$, für alle $k \in \mathbf{N}$.

Der Begriff einer Teilfolge wird wie folgt (partiell) verallgemeinert:

1.20. Definition. Ein Netz $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt ein *Teilnetz des Netzes* $(y_\beta)_{\beta \in B}$, wenn es eine Abb. $F : A \to B$ gibt mit den folgenden Eigenschaften:
(i) $x_\alpha = y_{F(\alpha)}$, $\alpha \in A$;
(ii) Zu jedem $\beta' \in B$ existiert $\alpha' \in A$ so, daß aus $\alpha \in A$ und $\alpha \succ \alpha'$ stets $F(\alpha) \succ \beta'$ folgt (d.h., $F(\alpha)$ ist schließlich größer als jedes vorgegebene $\beta' \in B$).

Bemerkung. Sei S ein topolog. Raum. Es gilt:
(a) Ein Punkt $x \in S$ ist genau dann Häufungspunkt eines Netzes (x_α), wenn ein Teilnetz von (x_α) gegen x konvergiert. (ÜA)
(b) S ist genau dann kompakt, wenn jedes Netz in S ein konvergentes Teilnetz besitzt. (vgl. z.Bp. [RS-I; p. 98]).
(c) Zu Folgen gibt es Teil*netze*, die keine Teil*folgen* sind!
(d) Die Eigenschaft der strengen Monotonie bei Teilfolgen kann man bei Netzen nicht realisieren.