# Kapitel I. Metrische Räume.

## ¶1. Metriken.

- Abstandsbegriff: Euklischer Abstand, Verallgemeinerungen.
- metrische Topologien und ihre Eigenschaften (§2).
- keine lineare Struktur erforderlich; Anwendung auf nicht-lineare Probleme.

**1.1. Definition.** Ein *metrischer Raum* ist ein Paar $(M, d)$, bestehend aus einer Menge $M$ und einer Abbildung

$$d : M \times M \to [0, \infty)$$

mit den Eigenschaften:

$(i)$ $\forall x, y \in M : \quad d(x, y) \geq 0;$

$(ii)$ $d(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y;$

$(iii)$ $d(x, y) = d(y, x);$

$(iv)$ $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$

Die Eigenschaften $(i)$, $(ii)$ heißen: *Positivität*; $(iii)$: *Symmetrie*, und $(iv)$: *Dreiecksungleichung*.

Bem.: Auf einer gegebenen Menge $M$ kann man i.a. viele verschiedene Metriken definieren!

**1.2. Beispiele.**

(a) $M = \mathbb{R}^n$ mit Euklidischem Abstand

$$d(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

(b) $M = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha^2 + \beta^2 = 1\} = \mathbb{S}^1$. Definiere $d_1(x, y)$ als Länge des kürzesten Kreisbogens, der $x$ und $y$ verbindet, und $d_2(x, y)$ als Länge der Sehne. (Bild!) Wie sieht das bei einem Torus $\subset \mathbb{R}^3$ aus?

(c) Sei $M := C[0, 1]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen $f\colon [0, 1] \to \mathbb{C}$. Auf diesem Raum können wir z.B. die folgenden Metriken betrachten

$$\begin{aligned} d_\infty(f, g) &:= \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|, \\ d_1(f, g) &:= \int_0^1 |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x, \\ d_2(f, g) &:= \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

oder allgemein

$$d_p(f,g) := \left( \int_0^1 |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}, \qquad 1 \le p < \infty. \tag{1.2}$$

Beweis der Dreiecksungleichung ist i.a. nicht ganz trivial! (Minkowskische Ungl.)
(d) Hamming-Metrik, FRR, diskrete Metrik, etc., vgl. Übungen!

**1.3. Definition.** Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ eine Folge. Wir sagen, die Folge $(x_n)$ *konvergiert gegen* $x \in M$, falls

$$d(x_n, x) \to 0, \qquad n \to \infty;$$

i.Z.: $x_n \to_d x$.

Wenn Konvergenz vorliegt, so ist der Limes eindeutig bestimmt.

**Bemerkung.** In Beispiel 1.2, (b), gilt

$$d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le \frac{\pi}{2} d_2(x,y),$$

und daher

$$x_n \to_{d_1} x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_n \to_{d_2} x.$$

Hingegen gilt in Bspl. 1.2, (c), nur

$$f_n \to_{d_\infty} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to_{d_p} f,$$

für $1 \le p < \infty$; die umgekehrte Implikation is aber i.a. nicht wahr.
Ähnlich gilt für alle $1 \le q < \infty$, daß

$$f_n \to_{d_q} f \qquad \Longrightarrow \qquad f_n \to_{d_p} f,$$

für alle $1 \le p \le q$; folgt mit der Hölderschen Ungleichung.

**1.4. Definition.** Sei $(M,d)$ ein metrischer Raum. Eine Folge $(x_n) \subset M$ heißt eine *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \ge N: \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

**1.5. Satz.** *Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum besitzt die Cauchy-Eigenschaft.*

**Beweis.** Wegen $x_n \to_d x$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, x) < \varepsilon/2$, für alle $n \geq N$. Damit folgt für alle $n, m \geq N$ wegen der Dreiecksungleichung

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon.$$

∎

Die Umkehrung von Satz 1.5 ist i.a. *nicht* wahr: betrachte etwa $\mathbb{Q}$ mit der üblichen Metrik $|x-y|$ und definiere $x_k$ als Dezimalentwicklung von $\sqrt{2}$, die nach der $k$-ten Nachkommastelle abgebrochen wurde. Man sieht leicht, daß $(x_k)$ eine CF in $\mathbb{Q}$ ist. Weiter konvergiert $x_k \to \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$. Wegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ hat $(x_k)$ keinen Limes in $\mathbb{Q}$.

**1.6. Definition.** Ein metrischer Raum $(M, d)$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge $(x_n) \subset M$ einen Grenzwert $x \in M$ besitzt.

Die Eigenschaft der Vollständigkeit ist außerordentlich wichtig. Wenn $(M, d)$ nicht vollständig ist, so sucht man daher nach einem (kleinstmöglichen) vollständigen metrischen Raum $(\tilde{M}, \tilde{d})$, der $(M, d)$ "enthält."

**1.7. Definition.** Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum, $B \subset M$. Dann heißt $B$ *dicht in* $M$, wenn es zu jedem $x \in M$ eine Folge $(y_n) \subset B$ gibt mit $y_n \to_d x$.

**1.8. Definition.** Seien $(X, d_1)$, $(Y, d_2)$ metrische Räume. Eine Funktion

$$f: X \to Y$$

heißt *stetig*, wenn aus $x_n \to_{d_1} x$ in $X$ stets $f(x_n) \to_{d_2} f(x)$ in $Y$ folgt.

**1.9. Definition.** Seien $(X, d_1)$, $(Y, d_2)$ metrische Räume. Eine Abbildung

$$h: X \to Y,$$

die die metrischen Abstände invariant läßt, d.h., für die

$$d_2(h(x), h(y)) = d_1(x, y), \qquad \forall x, y \in X,$$

gilt, heißt eine *Isometrie*.
Wenn es eine surjektive Isometrie $h: X \to Y$ gibt, so nennt man die metrischen Räume $X$ und $Y$ *isometrisch isomorph*.

*Bem.:* Isometrien sind stets injektiv und stetig.

**1.10. Theorem.** *Sei $(M, d)$ ein metrischer Raum. Dann gibt es einen vollständigen metrischen Raum $(\tilde{M}, \tilde{d})$ so, daß $(M, d)$ isometrisch isomorph ist zu einem dichten Teilraum von $\tilde{M}$.*
*Jeder vollst. metr. Raum $(M', d')$ mit den gleichen Eigenschaften wie $(\tilde{M}, \tilde{d})$ ist isometrisch isomorph zu $(\tilde{M}, \tilde{d})$.*

**Beispiel.** $(\mathbb{Q}, |.|)$ ist nicht vollständig, während $(\mathbb{R}, |.|)$ vollständig ist; weiter ist $\mathbb{Q}$ dicht in $(\mathbb{R}, |.|)$.

Wir geben hier nur eine knappe Beweisskizze und verschieben den Beweis von Theorem 1.10 ans Ende dieses Paragraphen. (Sei $\mathcal{C}(M)$ die Menge der Cauchyfolgen in $M$; die Metrik auf $M$ induziert eine Metrik auf $\mathcal{C}(M)$; Ä-Relation wie in Beispiel 0.4, (3). Betrachte Äquivalenzklassen von CFen etc.)

**Beispiele.**
(a) Der Raum $(C[0,1], d_\infty)$ wie in Bspl. 1.2, (c), ist vollständig. (ÜA)
(b) Der Raum $(C[0,1], d_1)$ wie in Bspl. 1.2, (c), ist *nicht* vollständig. Seine Vervollständigung ist isomorph zu $L_1(0,1)$, dem Raum der (Äquivalenzklassen von) Borel-meßbaren, Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f\colon (0,1) \to \mathbb{C}$.

In vollständigen metrischen Räumen gilt der *Fixpunktsatz von Banach*:

**1.11. Theorem.** *Sei $(M, d)$ ein vollständiger metrischer Raum mit $M \neq \emptyset$ und sei*

$$F\colon M \to M$$

*eine Abbildung mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Konstante $0 \leq \beta < 1$ mit*

$$d(F(x), F(y)) \leq \beta d(x, y), \qquad \forall x, y \in M. \tag{1.3}$$

*Dann besitzt $F$ genau einen Fixpunkt $x_0 \in M$, d.h.,*

$$\exists_1 x_0 \in M\colon F(x_0) = x_0. \tag{1.4}$$

**Bemerkungen.**

(a) (1.3) $\implies$ $F\colon X \to X$ stetig.

(b) $F$ mit (1.3) und $0 \le \beta < 1$ heißt eine *strikte Kontraktion.*

(c) $\beta = 1$ oder auch die Annahme $d(F(x), F(y)) < d(x, y)$ reichen i.a. nicht aus! (ÜA)

**Beweis.**

(1) *Eindeutigkeit:* Aus $F(x_0) = x_0$ und $F(y_0) = y_0$ folgt mit (1.3)

$$d(x_0, y_0) = d(F(x_0), F(y_0)) \le \beta d(x_0, y_0),$$

also $d(x_0, y_0) = 0$, da $\beta < 1$. Also folgt $x_0 = y_0$.

(2) *Existenz:* Wähle ein bel. $y \in M$ als Startpunkt und zeige, daß die Folge

$$y, F(y), F(F(y)), \dots,$$

eine Cauchyfolge ist. Wir definieren dazu

$$y_0 := y, \qquad y_{k+1} := F(y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

und schätzen ab

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &= d(F(y_0), F(y_1)) \le \beta d(y_0, y_1), \\ d(y_2, y_3) &= d(F(y_1), F(y_2)) \le \beta d(y_1, y_2) \\ &\le \beta^2 d(y_0, y_1). \end{aligned}$$

Induktion liefert

$$d(y_n, y_{n+1}) \le \beta^n d(y_0, y_1), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Daraus folgt für alle $m > n \in \mathbb{N}$ mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\le d(y_n, y_{n+1}) + \ldots + d(y_{m-1}, y_m) \\ &\le \left(\beta^n + \ldots + \beta^{m-1}\right) d(y_0, y_1). \end{aligned}$$

Wegen $\beta < 1$ folgt

$$\beta^n + \ldots + \beta^{m-1} = \beta^n (1 + \beta + \beta^2 + \ldots + \beta^{m-n-1}) \le \beta^n \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j = \frac{\beta^n}{1-\beta}$$

und somit

$$d(y_n, y_m) \le \frac{\beta^n}{1-\beta} d(y_0, y_1), \qquad \forall m > n.$$

$\implies$ $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist CF.

Da $(M, d)$ vollst., gibt es ein $x_0 \in M$ mit

$$d(y_n, x_0) \to 0, \qquad n \to \infty.$$

*Behauptung:* $F(x_0) = x_0$, d.h., $x_0$ ist Fixpunkt von $F$.
Beweis der Beh.: Aus $y_n \to_d x_0$ und der Stetigkeit von $F$ folgt

$$F(y_n) \to F(x_0).$$

Andrerseits ist $F(y_n) = y_{n+1}$, also

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{k\to\infty} y_k = x_0,$$

also $F(x_0) = x_0$. ∎

**Anwendungen.** Z.B. (nicht-lineare) Integralgleichungen; vgl. Übungen. Beweis des Satzes über die Umkehrfunktion.