¶10. Der Laplace-Operator im $\mathbf{R}^m$.

Auf dem dichten Teilraum $C_c^\infty(\mathbf{R}^m) \subset L_2(\mathbf{R}^m)$ ist der Laplace-Operator $-\Delta$ definiert durch

$$(-\Delta\varphi)(x) := -\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\varphi\right)(x), \qquad x \in \mathbf{R}^m,$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$. Mit Hilfe der Fouriertransformation kann man den Operator $-\Delta: C_c^\infty \to C_c^\infty$ in eindeutiger Weise zu einem selbst-adjungierten Operator H_0 im Hilbertraum $\mathcal{H} := L_2(\mathbf{R}^m)$ fortsetzen. Anschließend berechnen wir den Integralkern von $(H_0 + \lambda)^{-1}$, für alle $\lambda > 0$.
Analog kann man die Operatoren $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tH_0}$, $t \in \mathbf{R}$, behandeln, die eine stark stetige unitäre Gruppe bilden ([RS-II]).
Sei wieder $L_2^{(2)}$ der gewichtete L_2-Raum aus Par. 9, d.h.,

$$f \in L_2^{(2)}(\mathbf{R}^m) \quad \Longleftrightarrow \quad f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{C} \text{ meßbar, } \int_{\mathbf{R}^m} (1+|x|^2)^2 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Wegen $C_c^\infty(\mathbf{R}^m) \subset L_2^{(2)}$ ist $L_2^{(2)}$ ein dichter Teilraum des Hilbertraums $\mathcal{H} := L_2(\mathbf{R}^m)$. Der Multiplikationsperator

$$M_{|x|^2}: L_2^{(2)} \to \mathcal{H}, \qquad L_2^{(2)} \ni \varphi \mapsto |x|^2\varphi(.),$$

ist symmetrisch,

$$\left\langle M_{|x|^2}\varphi\,,\, \psi\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \varphi\,,\, M_{|x|^2}\psi\right\rangle_{\mathcal{H}}, \qquad \varphi, \psi \in L_2^{(2)},$$

und sogar *selbst-adjungiert*, d.h., dieser Operator besitzt keine echten symmetrischen Fortsetzungen (denn sein Definitionsbereich ist größtmöglich gewählt).
Wir definieren nun H_0 als das Bild von $M_{|.|^2}$ unter der Fouriertransformation: Es ist $\mathcal{F}: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitär nach Plancherel, und nach Par. 9 ist

$$W^2(\mathbf{R}^m) := \mathcal{F}(L_2^{(2)}(\mathbf{R}^m)),$$

W^2 Sobolevraum. Wir definieren nun

$$H_0: W^2 \to \mathcal{H}, \qquad H_0\varphi := \mathcal{F}^{-1}M_{|\lambda|^2}\mathcal{F}\varphi, \quad \varphi \in W^2.$$

Da $M_{|.|^2}: L_2^{(2)} \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und $\mathcal{F}$ unitär, ist auch H_0 selbstadjungiert. Man sieht leicht, daß $H_0\varphi = -\Delta\varphi$ gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$. (*)

(*) Man kann zeigen, daß H_0 mit der Abschließung von $-\Delta: C_c^\infty(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{H}$ übereinstimmt, d.h., H_0 ist sogar *wesentlich selbstadjungiert.*

Wegen $-\Delta = (-\mathrm{i}\nabla)^2$ entwickeln wir zunächst einen Kalkül für Operatoren der Form $f(-\mathrm{i}\nabla)$, mit $f\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{C}$ meßbar und beschränkt, d.h., $f \in L_\infty(\mathbf{R}^m)$. Wir bezeichnen dann mit $f(-\mathrm{i}\nabla)$ den Operator

$$L_2 \ni \varphi \mapsto \mathcal{F}^{-1} M_{f(\lambda)} \mathcal{F}\varphi \in L_2.$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, und es gilt:

10.1. Proposition. *Sei $f \in L_\infty(\mathbf{R}^m)$. Falls zusätzlich*
(i) $f \in L_2(\mathbf{R}^m)$,
oder
(ii) $\check{f} \in L_1(\mathbf{R}^m)$,
so gilt

$$(f(-\mathrm{i}\nabla)\varphi)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int \check{f}(x-y)\varphi(y)\,dy,$$

für alle $\varphi \in L_2$. Das Integral konvergiert für alle x im Fall (i), und für fast alle x im Fall (ii).

Beweis. (Nur für Fall (*i*); für Fall (*ii*), vgl. [RS-II; p. 57/58].)
Sei $f \in L_\infty \cap L_2$ und sei $\varphi \in \mathcal{S}$. Da $f \in \mathcal{S}'$ folgt mit Thm. 7.16

$$\begin{aligned} f(-\mathrm{i}\nabla)\varphi &=_{\text{Def.}} \mathcal{F}^{-1}(f\hat{\varphi}) \\ &=_{\text{Thm. 7.16, (c)}} (2\pi)^{-m/2}\check{f} * \check{\hat{\varphi}} \\ &=_{\text{Thm. 7.16, (a)}} (2\pi)^{-m/2} \int \check{f}(y)\varphi(x-y)\,dy; \end{aligned}$$

dabei ist $\check{f} \in L_2$ nach Plancherel. Damit gilt die behauptete Gleichung nach Plancherel.
Sei nun $\varphi \in L_2$, und $(\varphi_n) \subset \mathcal{S}$ mit $\varphi_n \to \varphi$ in L_2.
Da $f \in L_\infty$, gilt auch $f\hat{\varphi}_n \to f\hat{\varphi}$ in L_2, mithin auch

$$f(\mathrm{i}\nabla)\varphi_n \to f(-\mathrm{i}\nabla)\varphi \quad \text{in } L_2.$$

Wegen des Lemmas von Riesz(**) gibt es daher eine Teilfolge $(\varphi_{n_j}) \subset (\varphi_n)$ mit

$$f(-\mathrm{i}\nabla)\varphi_{n_j} \to f(-\mathrm{i}\nabla)\varphi, \qquad \text{punktweise f.ü.}$$

Da $\check{f} \in L_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (f(-\mathrm{i}\nabla)\varphi)(x) &=_{\text{f.ü.}} \lim_{j\to\infty} \left(f(-\mathrm{i}\nabla)\varphi_{n_j}\right)(x) \\ &= \lim_{j\to\infty} (2\pi)^{-m/2} \int \check{f}(y)\varphi_{n_j}(x-y)dy \\ &= (2\pi)^{-m/2} \int \check{f}(y)\varphi(x-y)dy. \end{aligned}$$

∎

(**) Zu $(g_n) \subset L_2$ mit $g_n \to g$ in L_2 gibt es eine Teilfolge $(g_{n_j}) \subset (g_n)$ mit $g_{n_j} \to g$ punktweise f.ü.

Wir wollen jetzt den Integralkern der Operatoren $(H_0 - E)^{-1}$ für $E \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty)$ bestimmen.
Da $H_0 = \mathcal{F}^{-1}|\lambda|^2\mathcal{F}$, kann man leicht zeigen, daß

$$(H_0 - E)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}\frac{1}{|\lambda|^2 - E}\mathcal{F}, \qquad E \in \mathbf{C} \setminus [0, \infty),$$

dabei ist $(H_0 - E)^{-1}$ die Inverse von $H_0 - E$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Da die FT Multiplikation in Faltung überführt, erhalten wir für $(H_0 - E)^{-1}$ einen einfachen Ausdruck als Faltungsoperator.

10.2. Beispiel. Der Operator $(H_0 - E)^{-1}$ im $\mathbf{R}^3$.
Wir schreiben $E = -\kappa^2$ mit $\operatorname{Re}\kappa > 0$, und definieren

$$f(\lambda) := (\lambda^2 + \kappa^2)^{-1}, \qquad \lambda \in \mathbf{R},$$

wobei $\lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$. Nach dem obigen ist

$$(H_0 - E)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}M_f\mathcal{F} = f(-\mathrm{i}\nabla),$$

und da $f \in L_2 \cap L_\infty$ folgt mit Prop. 10.1, Fall (i), daß

$$(H_0 + \kappa^2)^{-1}\varphi = (2\pi)^{-3/2}\int \check{f}(x-y)\varphi(y)dy, \qquad \varphi \in L_2.$$

Wir müssen also nur noch $\check{f}$ berechnen. Dies gelingt wie folgt:
Da $f \in L_2$ ist, gilt nach Thm. 8.3

$$(2\pi)^{-3/2}\check{f} = (2\pi)^{-3}\mathrm{l.i.m.}_{R\to\infty}\int_{|\lambda|<R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cdot x}}{\lambda^2 + \kappa^2}\,\mathrm{d}\lambda;$$

dabei konvergiert die R.S. in L_2 nach Plancherel (vgl. Thm. 8.3).
Wir zeigen nun noch, daß die R.S. *für alle* $x \neq 0$ punktweise gegen $\mathrm{e}^{-\kappa|x|}/4\pi|x|$ konvergiert. Damit ist dann gezeigt, daß für alle $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^3)$

$$\left((H_0 + \kappa^2)^{-1}\varphi\right)(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbf{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-\kappa|x-y|}}{|x-y|}\varphi(y)\,\mathrm{d}y.$$

Berechnung des (punktweisen) Limes für $R \to \infty$ von

$$J_R(x) := (2\pi)^{-3}\int_{|\lambda|<R}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cdot x}}{\lambda^2 + \kappa^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Sei $0 \neq x \in R^3$ fest. Wir führen Kugelkoordinaten r, ϑ, φ im $\mathbf{R}^3$ ein bezgl. der durch $x \neq 0$ gegebenen Achse mit $r > 0$, $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$. Dabei wählen wir

$$\vartheta := \arccos\left(\frac{\lambda \cdot x}{|\lambda|\,|x|}\right), \quad \text{oder} \quad \lambda \cdot x = |\lambda|\,|x|\cos\vartheta.$$

Mit dem Volumenelement $r^2 \mathrm{d}r\ \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\ \mathrm{d}\varphi$ erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}\int_{|\lambda|<R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\cdot x}}{\lambda^2+\kappa^2}\,\mathrm{d}\lambda &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r|x|\cos\vartheta}}{r^2+\kappa^2} r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\vartheta \\ &= 2\pi \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r|x|\cos\vartheta}}{r^2+\kappa^2} r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta,\end{aligned}$$

da der Integrand nicht von φ abhängt. Die Substitution $u := \cos\vartheta$ (dabei wird der Faktor $\sin\vartheta$ elegant beseitigt!) ergibt

$$2\pi \int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r|x|\cos\vartheta}}{r^2+\kappa^2} r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta = 2\pi \int_0^R \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r|x|u}}{r^2+\kappa^2}\, r^2\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}r.$$

Nun führen wir die Integration bzgl. u aus und finden

$$\begin{aligned} J_R(x) &= \lim_{R\to\infty} (2\pi)^{-2}(\mathrm{i}|x|)^{-1} \int_{-R}^{R} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}r|x|}}{r^2+\kappa^2}\, r\,\mathrm{d}r \\ &= \lim_{R\to\infty} \frac{(2\pi)^{-2}}{\mathrm{i}|x|} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}|x|z}}{(z+\mathrm{i}\kappa)(z-\mathrm{i}\kappa)}\,\mathrm{d}z,\end{aligned}$$

mit $z \in \mathbf{C}$; der Weg $\mathcal{C}_R \subset \mathbf{C}$ wird wie im Einschub E im Anschluß an Theorem E.4 gewählt. Die Abfall-Bedingung aus Theorem E.4 ist wegen des Faktors $\frac{r}{r^2+\kappa^2}$ offensichtlich erfüllt. In der oberen Halbebene hat der Integrand eine einfache Polstelle bei $z = \mathrm{i}\kappa$; das Residuum an dieser Stelle ist gerade

$$\left(\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z|x|}}{2z}\right)\Bigg|_{z=\mathrm{i}\kappa} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\kappa|x|},$$

also

$$\int_{\mathcal{C}_R} \frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}|x|z}}{(z+\mathrm{i}\kappa)(z-\mathrm{i}\kappa)}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\kappa|x|},$$

und damit

$$(2\pi)^{-3/2}\check{f}(x) = \frac{1}{4\pi|x|}\cdot \mathrm{e}^{-\kappa|x|}.$$

∎

Für $m \neq 3$ ist die Berechnung der Fouriertransformierten von $(\lambda^2+\kappa^2)^{-1}$ nicht so explizit wie im vorangehenden Beispielen sondern führt auf *Besselfunktionen.* (Vgl. auch L. Schwartz, *“Méthodes mathématiques pour les sciences physiques,”* pp. 223 ff, wo die Fouriertransformation von Funktionen $f(|x|)$ vorgerechnet wird. Es ist $\hat{f}$ wieder rotationssymmetrisch. $f(|x|)$ und $\hat{f}(|k|)$ sind durch die *Hankel-Transformation* miteinander verknüpft.
Vgl. auch Dym und McKean.

¶11. Grundlösungen. Der Satz von Hörmander, Malgrange und Ehrenpreis.

Sei $P(D)$ ein Differentialoperator der Ordnung $\ell \in \mathbf{N}$ mit konstanten Koeffizienten, d.h., für $|\alpha| \leq \ell$ gebe es Zahlen $a_\alpha \in \mathbf{C}$ mit

$$P(D)u = \sum_{|\alpha|\leq\ell} a_\alpha D^\alpha u, \qquad u \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m),$$

oder auch für alle $u \in \mathcal{S}'$ oder $u \in \mathcal{D}'$. Um die Gleichung

$$P(D)u = f$$

bei gegebenem $f \in C_c^\infty(\mathbf{R}^m)$ nach $u \in \mathcal{D}'$ aufzulösen, sucht man eine Distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$, die der Gleichung

$$P(D)v = \delta$$

genügt. Wenn man ein solches v gefunden hat, definiert man

$$u := v * f,$$

und es folgt

$$P(D)u = P(D)(v * f) = (P(D)v) * f = \delta * f = f.$$

11.1. Definition. Sei $P(D)$ ein Diff.-Operator mit konstanten Koeffizienten. Eine Distribution $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ mit $P(D)v = \delta$ heißt eine *Fundamentallösung* zum Op. $P(D)$. (I.a. keine Eindeutigkeit.)

11.2. Lemma. (Vgl. mit Beispiel 10.2)
Sei $N \in \mathbf{N}$ mit $4N \geq m+1$. Dann besitzt der Operator $(I-\Delta)^N$ eine Fundamentallösung $F \in L_2(\mathbf{R}^m)$, d.h., es gibt eine Funktion $F \in L_2(\mathbf{R}^m)$ mit

$$(I-\Delta)^N F = \delta.$$

Beweis. Sei $G(\xi) := (1+|\xi|^2)^{-N}$; wegen $4N \geq m+1$ ist dann $G \in L_2(\mathbf{R}^m)$. Nach Plancherel ist daher auch $F := \check{G} \in L_2(\mathbf{R}^m)$, und es gilt

$$\begin{aligned}(I-\Delta)^N F &= \mathcal{F}^{-1}(1+|\xi|^2)^N \mathcal{F}F = \mathcal{F}^{-1}\Big((1+|\xi|^2)^N(\hat{F})(\xi)\Big)\\ &= \mathcal{F}^{-1}\big((1+|\xi|^2)^N G(\xi)\big) = \check{1} = \delta.\end{aligned}$$

∎

Allgemein gilt der folgende fundamentale Satz:

11.3. Theorem. (Hörmander-Malgrange-Ehrenpreis)
Es sei $P(D)$ ein Differentialoperator mit konstanten (reellen) Koeffizienten. Dann besitzt $P(D)$ eine Fundamentallösung, d.h., es gibt ein $v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ mit $P(D)v = \delta$.

Tatsächlich kann man sogar $v \in \mathcal{S}'$ finden. Beweise findet man bei Trèves, [RS-II], Smoller etc.

Beweis-Idee: Unter der Fouriertrafo wird $P(D)$ verwandelt in $P(\xi)$, ein reelles Polynom in der Variablen $\xi \in \mathbf{R}^m$. Die Gleichung

$$P(D)v = \delta$$

wird unter $\mathcal{F}$ transformiert in

$$P(\xi)\hat{v} = 1,$$

sofern man $v \in \mathcal{S}'$ annimmt (!). In diesem Falle gilt

$$\hat{v} = \frac{1}{P(\xi)},$$

und somit

$$v = \mathcal{F}^{-1}\frac{1}{P(\xi)}.$$

Die Hauptschwierigkeit beim Beweis von Hörmander-Malgrange-Ehrenpreis liegt also darin, daß man i.a. nicht ohne weiteres feststellen kann, ob die Funktion $1/P(\xi)$ eine temperierte Distribution erzeugt. Hier geht es vor allem um die Nullstellen von P etc. Die damit verbundenen algebraischen Fragen werden zT durch einen Satz von Seidenberg und Tarski beantwortet (vgl. [Trèves, Smoller]). [RS-II] stützen sich hingegen auf den Satz von Paley-Wiener.

N. Ortner und P. Wagner: Listen mit Fundamentallösungen

Abschließende Bemerkungen zu Pseudo-Differentialoperatoren (ψdo) und Fourier-Integraloperatoren (FIO).