¶10. Kompakte Operatoren.

Wir behandeln

• Kompakte Mengen in vollständigen metrischen Räumen;
• Kompakte Operatoren $\in \mathcal{B}(X,Y)$ für BRe X,Y;
• Das Spektrum kompakter Operatoren (Riesz-Schauder-Theorie).

(A) Kompakte Mengen in vollständigen metrischen Räumen.

Wir beginnen mit der bekannten Grunddefinition von Kompaktheit, die in allen topologischen Räumen gültig ist:

10.1. Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum (oder auch nur ein topologischer Raum). Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *kompakt*, wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$K \subset \cup_{\alpha \in A} U_\alpha \tag{10.1}$$

durch eine Familie $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, mit $U_\alpha \subset X$ offen, ein *endliches* Teilsystem $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_m}$ gibt mit

$$K \subset \cup_{k=1}^m U_{\alpha_k}.$$

10.2. Bemerkungen. (vgl. zB [Analysis II], [Y;p. 4/5])
(a) Kompakte Mengen sind abgeschlossen.
(b) Sei $K \subset X$ kompakt und sei $M \subset K$ abgeschlossen. Dann ist auch M kompakt.

10.3. Definition. Sei (X,d) ein metrischer (oder auch nur ein topologischer) Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *relativ-kompakt,* wenn die Abschließung $\overline{M}$ kompakt ist.

In metrischen Räumen ist es günstig, einen weiteren Begriff einzuführen:

10.4. Definition. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt *präkompakt* oder *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Kugeln $B(x_i,\varepsilon) \subset X$, $i = 1, \ldots, m$, gibt mit

$$M \subset \cup_{i=1}^m B(x_i,\varepsilon).$$

(Dabei hängen m und die Punkte x_i im allgemeinen von ε ab.)

Bemerkung. (Bild!) Sei (X,d) wie in Def. 10.4 und sei $M \subset X$. Sei $\varepsilon > 0$. Eine Teilmenge $N \subset X$ nennt man ein *ε-Netz für M*, wenn

$$M \subset \cup_{x \in N} B(x,\varepsilon).$$

Die Mittelpunkte x der Kugeln $B(x,\varepsilon)$ müssen dabei nicht in M liegen.

10.5. Theorem. ([Y; p. 13/14]) *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum. Eine Teilmenge $M \subset X$ ist genau dann relativ-kompakt, wenn M total beschränkt ist.*

Wir gliedern zwei Argumente aus dem Beweis aus:

10.6. Lemma. *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $M \subset X$ abgeschlossen und total beschränkt. Dann besitzt jede Folge $(x_k) \subset M$ eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in M.*

Beweis. Weil M total beschränkt ist, gibt es endlich viele Kugeln mit Radius $\varepsilon/2$, die M überdecken. In mindestens einer dieser Kugeln liegen daher unendlich viele Mitglieder der Folge (x_k). Folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Punkt $x_\varepsilon \in X$ und eine Teilfolge $(x_{n_\varepsilon(k)})_{k\in\mathbf{N}} \subset (x_k)$ mit $x_{n_\varepsilon(k)} \in B(x_\varepsilon, \varepsilon/2)$ für alle $k \in \mathbf{N}$; insbesondere gilt

$$d(x_{n_\varepsilon(k)}, x_{n_\varepsilon(k')}) < \varepsilon, \qquad \forall k, k' \in \mathbf{N}.$$

Dieses Argument wenden wir an mit $\varepsilon := 1$, dann mit $\varepsilon := 1/2$, $\varepsilon := 1/4$, usw., wobei wir sukzessive Teilfolgen aus der vorher konstruierten Teilfolge auswählen.
Wir erhalten damit für alle $j \in \mathbf{N}$ Teilfolgen

$$(x_k^{(j)})_{k\in\mathbf{N}} \subset (x_k^{(j-1)})_{k\in\mathbf{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbf{N}}$$

mit der Eigenschaft

$$d(x_k^{(j)}, x_{k'}^{(j)}) < 2^{-j}, \qquad \forall j \in \mathbf{N}, \quad \forall k, k' \in \mathbf{N};$$

formal haben wir dabei $(x_k^{(0)})_{k\in\mathbf{N}} := (x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ gesetzt.
Die *Diagonalfolge* $(y_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset (x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ mit

$$y_k := (x_k^{(k)})_{k\in\mathbf{N}},$$

ist dann eine Cauchyfolge. Wegen (X,d) vollständig und M abgeschlossen ist auch der metrische Raum (M,d) vollständig, die CF (y_k) besitzt also einen Limes in M. ∎

10.7. Lemma. *Sei (X,d) ein vollständiger metrischer Raum und sei $M \subset X$ abgeschlossen und total beschränkt. Dann gibt es zu jeder offenen Überdeckung*

$$M \subset \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$$

eine abzählbare Menge $\{\alpha_k \,;\, k \in \mathbf{N}\} \subset A$ so, daß

$$M \subset \cup_{k=1}^{\infty} U_{\alpha_k}.$$

Beweis. Da M total beschränkt ist gibt es zu $\varepsilon_j := 1/j$, $j \in \mathbf{N}$, jeweils *endlich viele* offene Kugeln $B_k^{(j)} = B(x_{kj}, 1/j) \subset X$, $k = 1, \ldots, m_j$, mit

$$M \subset \cup_{k=1}^{m_j} B_k^{(j)}.$$

Die Gesamtmenge $\mathcal{B}$ dieser Kugeln ist abzählbar, also $\mathcal{B} = \{B_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$.
Wir haben also zwei offene Überdeckungen von M und wollen jetzt eine Verbindung zwischen den beiden herstellen. Dies gelingt wie folgt: Zu jedem $x \in M$ gibt es (mindestens) ein $\alpha \in A$ mit $x \in U_\alpha$, und zu (x, α) gibt es ein $n \in \mathbf{N}$ mit

$$x \in B_n \subset U_\alpha.$$

(Denn: wegen U_α offen und $x \in U_\alpha$ gibt es ein $j \in \mathbf{N}$ mit $B(x, 1/j) \subset U_\alpha$. Sei $k_x \in \{1, \ldots, m_{2j}\}$ so, daß x in der Kugel $B^{(2j)}_{k_x}$ liegt. Dann gilt

$$x \in B^{(2j)}_{k_x} \subset B(x, 1/j) \subset U_\alpha.)$$

Sei $\tilde{\mathcal{B}}$ die Teilmenge der Kugeln $B_n \in \mathcal{B}$, zu denen es jeweils ein $\alpha \in A$ gibt mit $B_n \subset U_\alpha$. Die Menge $\tilde{\mathcal{B}}$ ist abzählbar, d.h., $\tilde{B} = \{\tilde{B}_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$.
Nach der obigen Überlegung wird M von der Familie $(\tilde{B}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ überdeckt.
Zu jedem $n \in \mathbf{N}$ gibt es nach Definition der Menge $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{B}_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ ein $U_{\alpha(n)}$ mit $\tilde{B}_n \subset U_{\alpha(n)}$. Da die Familie $(\tilde{B}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ die Menge M überdeckt, gilt dies dann auch für die Familie $(U_{\alpha(n)})_{n\in\mathbf{N}}$. ∎

Beweis von Theorem 10.5.
(1) Sei M relativ-kompakt; wir wollen zeigen, daß M dann total beschränkt ist.
Widerspruchsannahme: M nicht total beschränkt. Dann gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Folge $(m_n)_{n\in\mathbf{N}} \in M$ mit

$$d(m_i, m_j) \geq \varepsilon_0, \qquad \forall i \neq j \in \mathbf{N}. \tag{10.2}$$

(Denn: Für beliebig gewähltes m_1 ist $M \setminus B(m_1, \varepsilon_0) \neq \emptyset$ und es gibt ein $m_2 \in M \setminus B(m_1, \varepsilon_0)$. Es wird M aber auch $B(m_1, \varepsilon_0) \cup B(m_2, \varepsilon_0)$ nicht überdeckt etc.)
Sei $(B_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie von offenen Kugeln mit Radius $< \varepsilon_0/2$, die M überdeckt. Wegen (10.2) gibt es dann *kein* endliches Teilsystem, das M überdeckt (denn kein endliches Teilsystem kann alle Punkte m_n, $n \in \mathbf{N}$, überdecken). Also ist M nicht relativ-kompakt, Widerspruch!
(2) Wir nehmen umgekehrt an, daß M total beschränkt ist. Man sieht leicht (ÜA), daß die Abschließung $\overline{M}$ ebenfalls total beschränkt ist. Wir zeigen $\overline{M}$ kompakt.
Sei $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie offener Teilmengen von X, die $\overline{M}$ überdeckt. Nach Lemma 10.7 gibt es ein *abzählbares* Teilsystem $(U_{\alpha_k})_{k\in\mathbf{N}}$, das schon ausreicht, um $\overline{M}$ zu überdecken.
Wir nehmen widerspruchshalber an, daß *kein* endliches Teilsystem der abzählbaren Familie $(U_{\alpha_k})_{k\in\mathbf{N}}$ ausreicht, um $\overline{M}$ zu überdecken. Das bedeutet insbesondere, daß für alle $n \in \mathbf{N}$

$$\overline{M} \not\subset \cup_{k=1}^n U_{\alpha_k},$$

d.h., für alle $n \in \mathbf{N}$ gibt es ein $x_n \in \overline{M}$ mit $x_n \notin \cup_{k=1}^n U_{\alpha_k}$. Nach Lemma 10.6 enthält die Folge $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Teilfolge $(x_{n_j})_{j\in\mathbf{N}}$, die gegen einen Punkt $x_\infty \in \overline{M}$ konvergiert.
Dieser Punkt x_∞ muß aber in einer Menge U_{α_N} liegen, da $\overline{M} \subset \cup_{k=1}^\infty U_{\alpha_k}$. Daher gilt $x_n \in U_{\alpha_N}$ für unendlich viele $n \in \mathbf{N}$, also auch für ein $n > N$. Dies steht im Widerspruch zu $x_n \notin \cup_{k=1}^n U_{\alpha_k} \supset \cup_{k=1}^N U_{\alpha_k}$, für $n > N$. ∎

In vollständigen metrischen Räumen ist Kompaktheit im Sinne von Definition 10.1 äquivalent zur *Folgenkompaktheit:*

10.8. Satz. *Sei (X, d) ein metrischer Raum, und sei $M \subset X$. M ist genau dann prä-kompakt, wenn jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset M$ eine Teilfolge mit der Cauchyeigenschaft besitzt.*

Beweis.
(i) "$\Longleftarrow$": Für ein $\varepsilon_0 > 0$ gebe es *kein* ε_0-Netz. Wähle $x_1 \in M$ beliebig. Dann findet man induktiv zu $n \in \mathbf{N}$ ein $x_{n+1} \in M$ mit

$$x_{n+1} \notin B(x_1, \varepsilon_0) \cup \ldots \cup B(x_n, \varepsilon_0).$$

Also gilt $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0$ für $n \neq m$, und keine Teilfolge hat die Cauchyeigenschaft.
(ii) "$\Longrightarrow$": Vgl. Beweis zu Lemma 10.6. ∎

Beispiele kompakter Mengen.

10.9 Beispiel. Sei K ein kompakter metrischer Raum (etwa $K \subset \mathbf{R}^n$ kompakt), und sei $C(K)$ der Banachraum der stetigen Funktionen $f: K \to \mathbf{C}$, versehen mit der Maximums-Norm $\|.\|_\infty$. Nach Arzelà-Ascoli ist eine Teilmenge $M \subset C(K)$ genau dann relativ-kompakt, wenn die Funktionen $f \in M$ gleichmäßig beschränkt und gleichgradig (glm.) stetig sind.
Vgl. Thm. 2.10! Als Alternative zum Beweis von Thm. 2.10 könnte man auch direkt zeigen, daß eine beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenmenge M präkompakt ist. Dazu genügt es, zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz anzugeben etc. (ÜA)

10.10. Beispiel. (Fréchet-Kolmogoroff; [Y; p. 275])
Sei $p \in [1, \infty)$. Wir betrachten den Banachraum $L_p(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, versehen mit der Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Eine Teilmenge M von $L_p(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ ist genau dann prä-kompakt, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(i) Es gibt ein $C \geq 0$ mit $\|f\|_p \leq C$, $\forall f \in M$;
(ii) $\lim_{t\to 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|^p \mathrm{d}x = 0$, gleichmäßig in $f \in M$, d.h.:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall |t| < \delta,\ \forall f \in M: \int_{\mathbf{R}} |f(x+t) - f(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{10.3}$$

(iii) $\lim_{R\to\infty} \int_{|x|\geq R} |f(x)|^p \mathrm{d}x = 0$, gleichmäßig in $f \in M$. d.h.:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall f \in M: \int_{|x|\geq R} |f(x)|^p \mathrm{d}x < \varepsilon. \tag{10.4}$$

(B) Kompakte Operatoren in Banachräumen.

10.11. Definition. Seien X und Y Banachräume, und sei $B_X := \{x \in X\ ;\ \|x\|_X < 1\}$ die Einheitskugel in X. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ heißt *kompakt*, wenn das Bild $T(B_X)$ der Einheitskugel B_X eine relativ-kompakte Teilmenge von Y ist.

Satz 10.8 liefert das folgende Kriterium für die Kompaktheit eines Operators:

10.12. Satz. *Seien X, Y BRe und sei $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Es ist T genau dann kompakt, wenn es zu jeder beschränkten Folge $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset X$ eine Teilfolge $(x_{k_j})_{j\in\mathbf{N}} \subset (x_k)$ gibt mit $(Tx_{k_j})_{j\in\mathbf{N}}$ Cauchyfolge.*

10.13. Beispiel. Integraloperatoren in $C[a,b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$. Anwendung von Arzelà-Ascoli. [Y; p. 277]

10.14. Beispiel. Integraloperatoren mit Hilbert-Schmidt-Kern $K = K(x,y)$ in $L_2(M \times M)$,

$$\int_M \int_M |K(x,y)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

definieren einen kompakten Operator

$$T\colon L_2(M) \to L_2(M), \qquad f \mapsto \int_M K(.,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

10.15. Satz. *Seien X, Y, Z Banachräume. Dann gilt:*

(i) Linearkombinationen kompakter Operatoren in $\mathcal{B}(X,Y)$ sind kompakt.

(ii) Seien $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{B}(Y,Z)$ mit T kompakt oder S kompakt. Dann ist $S \circ T$ kompakt.

(iii) Sei $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Weiter gebe es eine Folge $(T_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathcal{B}(X,Y)$ kompakter Operatoren mit $\|T_n - T\| \to 0$, für $n \to \infty$. Dann ist auch T kompakt.

Bemerkung. Im Spezialfall $X = Y = Z$ sieht man, daß die kompakten Operatoren $\in \mathcal{B}(X,X)$ ein abgeschlossenes zweiseitiges *Ideal* in der Algebra $\mathcal{B}(X,X)$ bilden.

Beweis. (i) und (ii) sind klar. Wir beweisen nun (iii):
Nach Thm. 10.5 genügt es zu zeigen, daß $T(B_X)$ präkompakt ist, wenn B_X die Einheitskugel in X bezeichnet. Sei also $\varepsilon > 0$. Wegen $\|T_n - T\| \to 0$ gibt es ein $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ mit

$$\|T_{n_\varepsilon} - T\| < \varepsilon/2.$$

Da T_{n_ε} kompakt ist, ist das Bild $T_{n_\varepsilon}(B_X)$ präkompakt, es gibt also ein $\varepsilon/2$-Netz $(y_i)_{i=1,\dots,m}$ für $T_{n_\varepsilon}(B_X)$, d.h.,

$$T_{n_\varepsilon}(B_X) \subset \cup_{i=1}^m B(y_i, \varepsilon/2).$$

Zu jedem $x \in B_X$ gibt es also ein $i \in \{1,\dots,m\}$ mit

$$\|T_{n_\varepsilon}x - y_i\| < \varepsilon/2.$$

Damit folgt
$$\|Tx - y_i\| \leq \|T_{n_\varepsilon}x - y_i\| + \|(T - T_{n_\varepsilon})x\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$
Also ist $(y_i)_{i=1,\ldots,m}$ ein ε-Netz für die Menge $T(B_X)$. ∎

2. Beweis. von (iii):
Sei $(x_k)_{k\in\mathbf{N}} \subset B_X$. Da die T_n kompakt sind, können wir nach Satz 10.12 sukzessive Teilfolgen
$$(x_k^{(j+1)})_{k\in\mathbf{N}} \subset (x_k^{(j)})_{k\in\mathbf{N}} \subset (x_k)_{k\in N}$$
finden mit der Eigenschaft, daß die Folge $(T_n x_k^{(j)})_{k\in\mathbf{N}}$ für alle $n \leq j$ konvergiert. Sei $\xi_k := x_k^{(k)}$, $k \in \mathbf{N}$ (Diagonalfolge). Die Bildfolgen $(T_n\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ sind dann für alle $n \in \mathbf{N}$ konvergent. Damit gilt

$$\begin{aligned}\|T\xi_k - T\xi_\ell\| &\leq \|T\xi_k - T_n\xi_k\| + \|T_n\xi_k - T_n\xi_\ell\| + \|T_n\xi_\ell - T\xi_\ell\| \\ &\leq \|T - T_n\| + \|T_n\xi_k - T_n\xi_\ell\| + \|T - T_n\|\,.\end{aligned}$$

Mit $k, \ell \to \infty$ geht der mittlere Term (für jedes feste n) gegen Null und wir sehen, daß

$$\limsup_{k,\ell\to\infty} \|T\xi_k - T\xi_\ell\| \leq 2\,\|T - T_n\|\,.$$

Da, nach Voraussetzung, $\|T - T_n\| \to 0$ mit $n \to \infty$, folgt, daß $(T\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$ CF in Y ist. ∎

10.16. Beispiel. (Nukleare Operatoren (Grothendieck), [Y])
Seien X, Y Banachräume. Ein Operator $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ heißt *nuklear*, wenn es Folgen $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X'$, $(y_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset Y$, und $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset \mathbf{C}$ gibt mit

$$\|\lambda_n\|_{X'} \leq c_1, \qquad \|y_n\|_Y \leq c_2, \qquad \sum_{n\in\mathbf{N}} |\alpha_n| < \infty,$$

so, daß
$$Tx = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \langle x, \lambda_n\rangle\, y_n, \tag{10.5}$$
für alle $x \in X$. (Bem. zur Notation: $\langle x\,,\, \lambda_n\rangle := \lambda_n(x)$.)

Bemerkung. Die Existenz des (starken) Limes in Gl. (10.5) ergibt sich aus der Abschätzung
$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=n}^{m} \alpha_j \langle x, \lambda_j\rangle\, y_j\right\| &\leq \sum_{j=n}^{m} |\alpha_j| \cdot \|x\| \cdot \|\lambda_j\| \cdot \|y_j\| \\ &\leq c_1 c_2 \,\|x\| \cdot \sum_{j=n}^{m} |\alpha_j|,\end{aligned}$$
mit $\sum_{j=n}^{\infty} |\alpha_j| \to 0$ für $n \to \infty$.

Behauptung: Nukleare Operatoren sind kompakt.

Beweis: Definiere Operatoren T_n durch

$$T_n x := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \langle x, \lambda_j \rangle y_j.$$

Die T_n haben endlich-dimensionales Bild ("endlichen Rang") und sind daher kompakt (Bolzano-Weierstraß). Weiter gilt nach den obigen Abschätzungen

$$\|Tx - T_n x\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \langle x, \lambda_j \rangle y_j \right\| \leq c_1 c_2 \|x\| \sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j|,$$

mit $\sum_{j=n+1}^{\infty} |\alpha_j| \to 0$ für $n \to \infty$. Damit sehen wir $\|T - T_n\| \to 0$ mit $n \to \infty$, und daher liefert Satz 10.15, (iii), die Kompaktheit von T. ∎

Bemerkung. Im Hilbertraum kann man jeden kompakten Operator durch eine Folge von Operatoren mit endlichem Rang approximieren. Wenn in einem BR X *alle* kompakten Operatoren durch Operatoren mit endlichem Rang approximiert werden können, so sagt man, daß dieser BR die *endliche Approximationseigenschaft* (finite approximation property, propriété d'approximation finie) besitzt. Es gibt aber Banachräume, die die FAP nicht besitzen.

•

In dem folgenden Satz von Riesz geht es um die Existenz "fast orthogonaler" Elemente in normierten Vektorräumen. Im Hilbertraum liefert der Projektionssatz ein stärkeres Resultat.

10.17. Theorem. (Riesz; [Y; p. 84])
Sei X ein normierter VR und $M \subset X$ ein abgeschlossener lin. Teilraum mit $M \neq X$. Dann gibt es zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ ein $x_\varepsilon \in X$ mit

$$\|x_\varepsilon\| = 1, \qquad \operatorname{dist}(x_\varepsilon, M) = \inf_{m \in M} \|x_\varepsilon - m\| \geq 1 - \varepsilon.$$

Beweis. Sei $y \in X \setminus M$. Da M abgeschlossen ist, muß

$$\alpha := \operatorname{dist}(y, M) = \inf_{m \in M} \|y - m\| > 0$$

sein. Daher gibt es zu $0 < \varepsilon < 1$ ein $m_\varepsilon \in M$ mit

$$\beta_\varepsilon := \|y - m_\varepsilon\| \leq \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}.$$

Der Vektor $x_\varepsilon := \frac{1}{\beta_\varepsilon}(y - m_\varepsilon)$ hat dann die Eigenschaften $\|x_\varepsilon\| = 1$ und

$$\begin{aligned}
\|x_\varepsilon - m\| &= \frac{1}{\beta_\varepsilon}\,\|y - m_\varepsilon - \beta_\varepsilon m\| \\
&\geq \frac{1}{\beta_\varepsilon}\alpha \\
&\geq 1 - \varepsilon, \qquad \forall m \in M;
\end{aligned}$$

die erste Ungleichung folgt wegen $m_\varepsilon + \beta_\varepsilon m \in M$. ∎

Bemerkung. In reflexiven Banachräumen wird das infimum in Thm. 10.17 angenommen, d.h., es gibt ein $m_\varepsilon \in M$ mit $\|x_\varepsilon - m_\varepsilon\| = \inf_{m\in M}\|x_\varepsilon - m\|$. (ÜA)

Das folgende Korollar ergibt sich sofort aus dem Thm. von Riesz:

10.18. Korollar. *Sei X ein normierter VR, X nicht endlich-dimensional. Seien $M_n \subset X$ Teilräume mit $M_n \subset M_{n+1}$ und $M_n \neq M_{n+1}$, für alle $n \in \mathbf{N}$. Dann gibt es eine Folge $(y_n) \subset X$ mit $y_n \in M_n$, $\|y_n\| = 1$, und*

$$\operatorname{dist}(y_{n+1}, M_n) \geq 1/2, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

10.19. Korollar. *Die (abgeschlossene) Einheitskugel $K = \{x \in X\,;\ \|x\| \leq 1\}$ in einem Banachraum X ist genau dann kompakt, wenn X endlich-dimensional ist.*

Beweis.
(i) Sei X endlich-dimensional. Dann besitzt X eine Basis $x_1, \ldots, x_n$. Die Abbildung $\iota\colon \mathbf{R}^n \to X$, definiert durch

$$\mathbf{R}^n \ni (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \in X$$

ist offenbar stetig und bijektiv, also offen (nach dem Satz von der offenen Abbildung). Daher ist ι^{-1} stetig und X topologisch isomorph zu $\mathbf{R}^n$. Die Einheitskugel im $\mathbf{R}^n$ ist aber nach Bolzano-Weierstraß kompakt.
(ii) Angenommen, X ist nicht endlich-dimensional. Nach dem vorangehenden Korollar 10.18 gibt es dann eine Folge $(y_n) \subset X$ mit den Eigenschaften $\|y_n\| = 1$ und $\|y_m - y_n\| \geq 1/2$ für $m > n$. Dies steht offensichtlich im Widerspruch zur Annahme, die Einheitskugel wäre kompakt (denn die Folge $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ besitzt keine TF mit der Cauchy-Eigenschaft). ∎

Der folgende Satz von Schauder zeigt, daß ein Operator $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ genau dann kompakt ist, wenn der zu T duale Operator $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ kompakt ist:

10.20. Theorem. (Schauder; [Y; p. 282])
Seien X, Y normierte VRe und $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. Dann gilt:

T ist genau dann kompakt, wenn der duale Operator $T' \in \mathcal{B}(Y', X')$ kompakt ist.

Beweis. Es bezeichne $B_X \subset X$ und $B_{Y'} \subset Y'$ die Einheitskugeln in X resp. in Y'.
(1) Wir nehmen an, daß T kompakt ist. Sei $(\eta_j)_{j\in\mathbf{N}} \subset B_{Y'}$ eine Folge.
Nach Voraussetzung ist die Menge $T(B_X) \subset Y$ relativ-kompakt und somit ist

$$K := \overline{T(B_X)}$$

eine kompakte Teilmenge von Y. Wegen T beschränkt gibt es ein $R \geq 0$ mit $\|y\| \leq R$ für alle $y \in K$.
Bezeichne die Einschränkung der (stetigen, linearen) Funktionen η_j auf K durch F_j, d.h.,

$$F_j(y) := \langle y\,,\, \eta_j\rangle_{Y,Y'} = \eta_j(y), \qquad y \in K.$$

Dann:
— $|F_j(y)| \leq \|\eta_j\| \cdot \|y\| \leq R$, da $\eta_j \in B_{Y'}$, $y \in K$;
— $|F_j(y) - F_j(z)| \leq |\langle y - z\,,\, \eta_j\rangle_{Y,Y'}| \leq \|y - z\|$, für alle $y, z \in K$, d.h., die Familie $(F_j)_{j\in\mathbf{N}}$ ist gleichgradig stetig.
Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (in der allgemeinen Fassung mit $C(K)$, K ein kompakter metrischer Raum) gibt es eine Teilfolge $(F_{j_k})_{k\in\mathbf{N}}$, die *gleichmäßig* auf K konvergiert.
Damit sehen wir, daß die Funktionen

$$B_X \ni x \mapsto \langle Tx\,,\, \eta_{j_k}\rangle \in \mathbf{C}$$

gleichmäßig für $\|x\| \leq 1$ konvergieren. Wegen $\langle Tx\,,\, \eta_j\rangle = \langle x\,,\, T'\eta_j\rangle$ ist dies gleichbedeutend damit, daß die Funktionale $T'\eta_{j_k}$ in der (Norm-) Topologie von X' konvergieren.
Dies zeigt, daß T' kompakt ist.

(2) Sei nun umgekehrt $T'\colon Y' \to X'$ kompakt. Nach Teil (1) des Beweises ist dann $T''\colon X'' \to Y''$ kompakt. Wenn $B_{X''}$ die Einheitskugel in X'' bezeichnet, so folgt, daß $T''(B_{X''})$ relativ-kompakte Teilmenge von Y'' ist. Nach Satz 3.21 sind die kanonischen Einbettungen $J_X\colon X \hookrightarrow X''$ und $J_Y \hookrightarrow Y \to Y''$ isometrisch und nach Gl. (9.4) gilt

$$J_Y \circ T = T'' \circ J_x.$$

Damit ist $(J_Y \circ T)(B_X) \subset T''(B_{X''})$. Mithin ist auch $(J_Y \circ T)(B_X)$ relativ-kompakte Teilmenge von Y''. Damit ist aber klar, daß auch schon $T(B_X)$ eine relativ-kompakte Teilmenge von Y ist. Also ist T kompakt. ∎

10.21. Lemma. (Riesz)
Sei X ein Banachraum und sei $V \in \mathcal{B}(X, X)$ kompakt. Dann hat der Operator $\lambda I - V$ für alle $\lambda \in \mathbf{C}$ mit $\lambda \neq 0$ abgeschlossenes Bild.

Beweis. Es genügt, den Fall $\lambda = 1$ zu betrachten.
Sei $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \subset X$ eine Folge mit der Eigenschaft, daß die Vektoren $y_n := (I - V)x_n$ (stark) gegen ein $y \in X$ konvergieren. Wir wollen zeigen, daß auch $y \in \operatorname{Ran}(I - V)$ ist.

(1) In diesem Beweisteil machen wir die *Zusatzannahme*, daß die Folge (x_n) beschränkt ist. Wegen V kompakt gibt es dann eine TF $(x_{n_k})_{k\in\mathbf{N}} \subset (x_n)$ mit (Vx_{n_k}) konvergent. Wegen

$$x_{n_k} = y_{n_k} + Vx_{n_k}, \qquad k \in \mathbf{N},$$

konvergieren die x_{n_k} gegen ein $x \in X$. Es folgt $y = (I - V)x$.

(2) Wir nehmen jetzt an, daß die Folge $(\|x_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ unbeschränkt ist. Schreibe $T := I - V$ und setze

$$\alpha_n := \operatorname{dist}(x_n, N(T)),$$

mit $N(T) := \{x \in X \, ; \, Tx = 0\} = \ker T$. Zu jedem $n \in \mathbf{N}$ gibt es ein $w_n \in \ker T$ mit

$$\alpha_n \le \|x_n - w_n\| \le (1 + \frac{1}{n})\alpha_n.$$

Dann gilt $T(x_n - w_n) = Tx_n = y_n$. Falls die α_n eine beschränkte Folge bilden, können wir daher die x_n jeweils durch $x_n - w_n$ ersetzen und dann wie unter Punkt (1) argumentieren.

(3) Angenommen, es gilt $\alpha_n \to \infty$, $n \to \infty$. Wir betrachten

$$z_n := \frac{1}{\|x_n - w_n\|}(x_n - w_n), \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Dann gilt $\|z_n\| = 1$, $Tz_n = \frac{1}{\|x_n - w_n\|} y_n$ und $\lim_{n\to\infty} Tz_n = 0$. Daher folgt wie in (1), daß es eine TF $(z_{n_k})_{k\in\mathbf{N}} \subset (z_n)$ und ein $w_0 \in X$ gibt mit

$$z_{n_k} \to w_0, \qquad Tz_{n_k} \to 0, \qquad k \to \infty.$$

Wegen T stetig muß $Tw_0 = 0$ sein, also $w_0 \in \ker T$.
Andrerseits können wir $u_n := z_n - w_0$ betrachten; hier gilt

$$u_n \|x_n - w_n\| = x_n - w_n - w_0 \|x_n - w_n\|.$$

Der zweite und der dritte Term auf der RS liegen in $N(T)$, und daher muß

$$\|u_n\| \cdot \|x_n - w_n\| \ge \alpha_n \tag{$*$}$$

gelten. Aus

$$u_{n_k} \to 0, \qquad \|x_n - w_n\| \le \alpha_n(1 + \frac{1}{n}), \qquad \alpha_n \to \infty,$$

folgt aber $\|u_{n_k}\| \cdot \|x_{n_k} - w_{n_k}\| \le \frac{1}{2}\alpha_{n_k}$ für alle $k \ge k_0$, im Widerspruch zu $(*)$. ∎

10.22. Theorem. *Es sei $V \in \mathcal{B}(X, X)$ kompakt, und es sei $\lambda_0 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Dann ist entweder $\lambda_0 \in \varrho(V)$ oder λ_0 ist ein Eigenwert von V.*

Beweis. Wir gehen von der Annahme aus, daß $0 \ne \lambda_0$ kein Eigenwert von V ist, d.h., $T_{\lambda_0} := \lambda_0 I - V$ ist injektiv. Wir wollen dann $\lambda_0 \in \varrho(V)$ zeigen.

Nach Lemma 10.21 ist $X_1 := \operatorname{Ran}(T_{\lambda_0})$ ein abgeschlossener TR von X und $T_{\lambda_0}: X \to X_1$ ist bijektiv. Nach Thm. 4.10 (einer Folgerung aus dem Satz von der offenen Abbildung) ist die Umkehrabbildung

$$(T_{\lambda_0})^{-1}: X_1 \to X$$

stetig. Wir müssen nur noch zeigen, daß T_{λ_0} surjektiv ist, d.h., daß $\operatorname{Ran}(T_{\lambda_0}) = X$ gilt.
Annahme: $X_1 = \operatorname{Ran}(T_{\lambda_0}) \neq X$, d.h., X_1 ist ein echter TR von X.
Sei $X_2 := T_{\lambda_0} X_1$, $X_3 := T_{\lambda_0} X_2$, etc. Dann ist X_{n+1} ein echter abgeschlossener (!) TR von X_n, für $n \in \mathbf{N}_0$ (wenn wir noch $X_0 := X$ setzen). Denn angenommen, es gäbe ein $n_0 \in \mathbf{N}$ mit $X_{n_0-1} \neq X_{n_0}$, aber $X_{n_0+1} = X_{n_0}$. Dies würde

$$T_{\lambda_0} X_{n_0-1} = X_{n_0} = X_{n_0+1} \text{ und } T_{\lambda_0} X_{n_0} = X_{n_0+1}$$

bedeuten; wegen T_{λ_0} injektiv ist dies nicht mit $X_{n_0-1} \neq X_{n_0}$ verträglich. —
Wie in Korollar 10.18 (zum Satz von Riesz, Thm. 10.17) gibt es dann eine Folge $(y_n) \subset X$ mit $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$, und

$$\operatorname{dist}(y_n, X_{n+1}) \geq 1/2, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Für $n > m$ folgt dann

$$\frac{1}{\lambda_0}(Vy_n - Vy_m) = y_m + \left\{ -y_n - \frac{1}{\lambda_0}(T_{\lambda_0} y_m - T_{\lambda_0} y_n) \right\} = y_m - \tilde{y},$$

mit einem $\tilde{y} \in X_{m+1}$. Daraus folgt aber sofort

$$\|Vy_m - Vy_n\| \geq |\lambda_0|/2,$$

d.h., die Folge (Vy_n) kann keine konvergente Teilfolge enthalten. Dies steht im Widerspruch zur Kompaktheit von V. ∎

10.23. Theorem. *Es sei X ein BR, und $V \in \mathcal{B}(X, X)$ sei kompakt. Dann gilt:*

(i) $\sigma(V)$, das Spektrum von V, ist eine beschränkte Teilmenge von $\mathbf{C}$ und besteht aus höchstens abzählbar unendlich vielen Punkten der komplexen Ebene, die sich höchstens bei 0 häufen.

(ii) Eine Zahl $0 \neq \lambda \in \sigma(V)$ ist ein Eigenwert von V mit endlicher Vielfachheit.

(iii) Ein $0 \neq \lambda \in \mathbf{C}$ ist ein Eigenwert von V genau dann, wenn λ ein Eigenwert des dualen Operators V' ist.

Bem.: Wenn X unendlich-dimensional ist, so gilt stets $0 \in \sigma(V)$. Im Extremfall gilt $\sigma(V) = \{0\}$, wobei 0 ein EW sein kann, aber nicht sein muß.

Beweis. Nach Theorem 10.22 ist jedes $0 \neq \lambda \in \sigma(V)$ ein Eigenwert von V. Nach dem Satz von Schauder ist mit V auch V' kompakt, also ist auch jedes $0 \neq \mu \in \sigma(V')$ ein Eigenwert von V'.

Nach dem Satz von Phillips (Thm. 9.4), den wir aber nicht bewiesen haben, gilt $\varrho(V') = \varrho(V)$, und damit folgt (iii).
Zum Beweis von (i) und (ii) führen wir die folgende Annahme zum Widerspruch:
Annahme. Es gibt eine Folge $(x_n) \subset X$ linear unabhängiger Vektoren und eine Folge $(\lambda_n) \subset \mathbf{C}$ mit den Eigenschaften

$$V x_n = \lambda_n x_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \overline{\lambda} \tag{$*$}$$

mit einem $\overline{\lambda} \neq 0$.
Um den gewünschten Widerspruch herzuleiten, betrachten wir die (abgeschlossenen) Unterräume

$$X_n := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

Nach dem Satz von Riesz (Thm. 10.17) gibt es dann eine Folge $(y_n) \subset X$ mit $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ und

$$\operatorname{dist}(y_n, X_{n-1}) \geq 1/2, \qquad n = 2, 3, \ldots.$$

Für $n > m$ gilt dann

$$\begin{aligned} \lambda_n^{-1} V y_n - \lambda_m^{-1} V y_m &= y_n + (-y_m - \lambda_n^{-1} T_{\lambda_n} y_n + \lambda_m^{-1} T_{\lambda_m} y_m) \\ &= y_n - \tilde{z}, \end{aligned}$$

mit einem $\tilde{z} \in X_{n-1}$; denn wenn $y_n = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$ ist, so rechnet man sofort nach, daß

$$y_n - \lambda_n^{-1} V y_n = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j - \sum_{j=1}^n \lambda_n^{-1} \beta_j \lambda_j x_j \in X_{n-1}.$$

Analog zeigt man $T_{\lambda_m} y_m \in X_{m-1}$. Daher gilt nun

$$\left\| \lambda_n^{-1} V y_n - \lambda_m^{-1} V y_m \right\| \geq 1/2,$$

im Widerspruch zur Kompaktheit von V und der Annahme $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \neq 0$. •
Annahme: $0 \neq \lambda_0$ ist Eigenwert mit unendlicher Vielfachheit. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subset \ker(V - \lambda_0 I)$ mit $\{x_n\,;\, n \in \mathbf{N}\}$ linear unabhängig; man hätte also eine Situation wie in $(*)$ mit $\lambda_n := \lambda_0$ für alle $n \in \mathbf{N}$, also Widerspruch.
Analog zeigt man, daß sich eine Folge von Eigenwerten nur bei 0 häufen kann. ∎

Literaturhinweis zur Theorie der Banachräume:
Y Abramovich and C Aliprantis, *An Invitation to Operator Theory.* Graduate Studies in Mathematics Vol. 50, Amer. Math. Soc. 2002

Ausblick.

(1) **Kompakte Operatoren in Banachräumen:** Fredholmsche Alternative, Integralgleichungen, Dirichlet'sches RWP

(2) **Unbeschränkte lineare Operatoren.**

(3) **C_0-Halbgruppen und ihre Erzeuger.**

Sei X BR und $(T(t); t \geq 0) \subset \mathcal{B}(X)$ mit den Eigenschaften $T(0) = I$ und $T(t+s) = T(t)T(s)$, sowie $T(t_n)f \to T(t_0)f$, falls $t_n \to t_0$, für alle $f \in X$. "C_0-Halbgruppe von Operatoren."
Frage: Gibt es einen Operator H in X mit $T(t) = \mathrm{e}^{-tH}$, für alle $t \geq 0$? Diesen "Erzeuger" findet man durch Differentiation bei $t = 0$; Ansatz:
$D(H) := \{x \in X \,;\, \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) \text{ existiert } \}$.
Studium der Exponentialfkt. von (unbeschr.) Operatoren.
Parabolische PDE $u_t = Hu$, Diffusion.

(4) Distributionen $\mathcal{D}'(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ als induktiver Limes von Fréchet-Räumen.

(5) Fourier-Analysis: harmonic analysis, Grundlösungen bei partiellen DGln. mit konstanten Koeffenzienten, ψdO's (Pseudo-Differentialoperatoren)
$L = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha$, DO mit konstanten Koeffizienten.
zugeh. Polynom $P(k) = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha (\mathrm{i}k)^\alpha$.
Die Gleichung $Lu = f$ im $\mathbf{R}^m$ ist äquivalent zu $\widehat{Lu} = \hat{f}$ oder

$$P(k)\hat{u}(k) = \hat{f},$$

einer rein *algebraischen* Gleichung. Als Lösung bietet sich offenbar

$$\hat{u}(k) := \frac{\hat{f}}{P(k)}$$

an, oder

$$u = \left[\frac{1}{P(k)}\hat{f}(k)\right]^{\check{}} = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{(\mathcal{F}f)(k)}{P(k)}\right]$$

Was ist mit den Nullstellen von P?
Hörmander-Malgrange-Ehrenpreis: Es gibt ein $G \in \mathbf{S}'$ mit $LG = \delta$; Grundlösung, fundamental solution.
$\Longrightarrow \quad u := G * f$ löst die Gl. $Lu = f$, denn es ist $L(G * f) = (LG) * f = \delta * f = f$.
Weitere Bemerkungen zur Signalverarbeitung, E-Technik.

(6) Sobolev-Räume.

(7) Banach-Algebren; Banach-Verbände (Banach lattices)

Anwendungen. Physik, insbes. Quantenmechanik, solid state physics, statistische Mechanik
Stochastische Prozesse, Wiener-Maß, Brownsche Bewegung,
Feynman-Kac-formel, Feller-Halbgruppen.
Nicht-lineare Operatoren, Fréchet-, Gâteaux-Abl., Linerarisierung; Variationsrechnung, etwa Thomas-Fermi-Theorie.