Rainer Hempel, Institut *Computational Mathematics*,
AG Partielle Differentialgleichungen,
TU Braunschweig

Lineare Operatoren im Hilbertraum, Sommer 2017

Inhalt.

Kapitel I. Hilberträume.

1. Grundbegriffe.

Formen, Skalarprodukte, Vollständigkeit, Beispiele von Hilberträumen.

2. Orthogonalität, Satz von Riesz.

Projektionssatz; lineare Funktionale, Darstellungssatz von Riesz; Orthonormalbasen; schwache Konvergenz.

Kapitel II. Beschränkte Operatoren und kompakte Operatoren.

3. Beschränkte Operatoren.

Beispiele; adjungierter Operator; symmetrische Operatoren, Projektionen, Operatornorm.

4. Kompakte Operatoren.

Satz von Arzelà-Ascoli; Eigenwerte und Eigenvektoren; Spektralzerlegung für kompakte, symmetrische Operatoren. Resolvente und Spektrum.

Kapitel III. Selbstadjungierte Operatoren.

5. Unbeschränkte Operatoren.

Graphen; Abschließbarkeit; symmetrische Operatoren; selbstadjungierte Operatoren. Darstellungssatz für quadratische Formen.

6. Resolvente und Spektrum.

Neumannsche Reihe; Resolvente und Spektrum; wesentliche Selbstadjungiertheit; Störungssatz von Kato und Rellich. Selbstadjungierte Differentialoperatoren.

7. Der Spektralsatz.

Spektralscharen; Spektralsatz; Anwendungen des Spektralsatzes.

Einleitung

(1) Aus der Welt der endlichdimensionalen Vektorräume sind drei Hauptaspekte vertraut:

(a) lineare Eigenschaften;

(b) geometrische Eigenschaften;

(c) metrische Eigenschaften.

Hier betrachten wir die Verallgemeinerung auf den einfachsten ∞-dimensionalen Fall, nämlich den des *Hilbertraums*. Ein *HR* ist ein unendlich-dimensionaler VR mit Skalarprodukt, der sich außerdem der Eigenschaft der *Vollständigkeit* erfreut.

Hilberträume sind von grundlegender Bedeutung in der Mathematik und in der Physik; vgl. (5). Besonders wichtig sind Funktionenräume, die zugleich die Struktur eines Hilbertraums tragen.

(2) Wir betrachen zunächst HRe und ihre *Geometrie* (rechter Winkel, Orthogonalprojektionen, ...). Bereits an dieser Stelle kommt die Analysis in's Spiel (Cauchyfolgen haben stets einen Grenzwert: Vollständigkeit).

(3) Lineare Operatoren im HR.

(a) Stetige (= beschränkte) Operatoren, darunter besonders die *kompakten* und die *symmetrischen* Operatoren. Anwendung auf Integraloperatoren.

(b) Unbeschränkte Operatoren, hier besonders die *selbst-adjungierten*. Anwendung auf Differentialoperatoren.

(4) Spektrale Zerlegung selbstadjungierter Operatoren, d.h., unitäre Äquivalenz zu Multiplikationsoperatoren: **Spektralsatz** (Verallgemeinerung der "Hauptachsentransformation")

(5) Anwendungen in der Mathematik

— Analysis: Fourierreihen, Fouriertransformation, Partielle DGln.,

— Wahrscheinlichkeitstheorie (Stochast. Prozesse)

— Numerische Mathematik

Anwendungen in der Physik:

— Quantenmechanik

— Festkörperphysik

— Statistische Mechanik

Jede dieser obigen Anwendungen würde leicht eine komplette Vorlesung ergeben!

(6) Geschichte: Fredholm, Schmidt, Hilbert, Riesz, Banach, J.v. Neumann, Wiener, ...

§0. Notation.

Wir verwenden die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

(a) Mengen.

Sei X eine Menge.

$x \in X$: x ist Element von X;

$x \notin X$: x ist nicht Element von X.

$\forall x \in X$: für alle $x \in X$ gilt ...

$\exists x \in X$: es gibt ein $x \in X$, so daß gilt ...

$A \subset X$: A ist Teilmenge von X.

Für $A, B \subset X$ ist

$$A \setminus B := \{x \in A; x \notin B\}.$$

Die Menge der *geordneten Paare* (x, y) mit $x \in X$, $y \in Y$ heißt *kartesisches Produkt*,

$$X \times Y := \{(x, y); x \in X, y \in Y\}.$$

Sei nun X ein topologischer Raum (zB ein metrischer Raum).*) Dann gilt

$$M \subset X \text{ abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad X \setminus M \text{ offen}.$$

Für beliebiges $M \subset X$ ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M enthält,

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{M \subset N \subset X \\ X \setminus N \text{ offen}}} N.$$

(b) Funktionen.

Seien X, Y Mengen. Wir schreiben

$$f : X \to Y,$$

oder

$$x \mapsto f(x), \quad \text{oder} \quad X \ni x \mapsto f(x) \in Y,$$

für eine Funktion von X nach Y. (Zu jedem $x \in X$ gehört genau ein Wert $y = f(x) \in Y$.)
Für $A \subset X$ ist

$$f(A) := \{f(x); x \in A\} \subset Y,$$

und für $B \subset Y$,

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\} \subset X;$$

*) Es werden keine Kenntnisse aus der Topologie vorausgesetzt!

$f(X)$ heißt der *Wertebereich* oder das *Bild* von f,

$$\operatorname{Ran} f = \{f(x); x \in X\} = f(X) \subset Y.$$

f *surjektiv* $:\Longleftrightarrow \quad f(X) = Y$;

f *injektiv* $:\Longleftrightarrow \quad (f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y)$;

f *bijektiv* $:\Longleftrightarrow \quad f$ injektiv und surjektiv.

Die *Einschränkung* von $f : X \to Y$ auf $A \subset X$ wird mit $f \restriction_A$ bezeichnet.

Für $A \subset X$ ist χ_A die *charakteristische Funktion von* A,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Seien X, Y topologische Räume. Eine Abb. $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn gilt:

$$V \subset Y \text{ offen} \Rightarrow f^{-1}(V) \subset X \text{ offen}.$$

(c) Relationen.

0.1. Definition. Sei X Menge. Eine *Relation auf* X ist eine Teilmenge $\mathcal{R}$ von $X \times X$. Wenn $(x, y) \in \mathcal{R}$ ist, so sagen wir, daß x in $\mathcal{R}$-Relation zu y steht, i.Z.: $x\mathcal{R}y$.

0.2. Definition. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X \times X$ heißt eine *Äquivalenzrelation*, wenn gilt:

(i) $\mathcal{R}$ ist *reflexiv* (d.h., $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$);

(ii) $\mathcal{R}$ ist *symmetrisch* (d.h., aus $x\mathcal{R}y$ folgt $y\mathcal{R}x$);

(iii) $\mathcal{R}$ ist *transitiv* (d.h., aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}z$ folgt $x\mathcal{R}z$).

Für $x \in X$ und $\mathcal{R}$ Ä.-Relation heißt die Menge der $y \in X$ mit $y\mathcal{R}x$ die *Äquivalenzklasse von* x,

$$[x] := \{y \in X; y\mathcal{R}x\}.$$

0.3. Theorem. Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gehört jedes $x \in X$ zu genau einer Äquivalenzklasse. M.a.W.: X zerfällt in natürlicher Weise in disjunkte Äquivalenzklassen. (Beweis einfach)

Statt $\mathcal{R}$ schreibt man bei Äquivalenzrelationen gern $\sim$.

Die Menge der Äquivalenzklassen schreibt man $X/\mathcal{R}$.

0.4. Beispiele.

(1) Sei $X := \mathbb{Z}$ und
$$x\mathcal{R}y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in 3\mathbb{Z}.$$
Dann zerfällt X in die 3 Äquivalenzklassen
$$\begin{aligned}[0] &= \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\},\\ [1] &= \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\},\\ [2] &= \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}\end{aligned}$$

(2) Die reelle projektive Gerade.

Sei $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Wir definieren auf X eine Relation durch
$$x\mathcal{R}y \;:\Longleftrightarrow\; \exists \alpha \in \mathbb{R} : x = \alpha y,$$
wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist. Die Äquivalenzklassen kann man sich als Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ vorstellen (ohne den Punkt $(0,0)$).

(3) Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$.

Eine Folge $(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:
$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \;\forall n, m \geq N_\varepsilon : \;|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon.$$
Die Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Wir führen auf $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ eine Relation $\mathcal{R}$ ein vermöge
$$a\mathcal{R}b \;:\Longleftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0,$$
wenn $a = (\alpha_n)$ und $b = (\beta_n)$.

Behauptung. $\mathcal{R}$ ist eine Äquivalenzrelation. (Bew. klar.)

Bem.: Die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ ist nichts anderes als die Menge der reellen Zahlen (einschl. Metrik),
$$\mathbb{R} := \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathcal{R}.$$

Bemerkung. Weitere Beispiele für Relationen:

(1) Eine Relation $\mathcal{R}$ heißt *anti-symmetrisch* wenn
$$x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x \quad\Longrightarrow\quad x = y,$$
d.h., wenn x und y verschieden sind, dürfen sie nicht in Relation zu einander stehen. Eine Relation $\mathcal{R}$ heißt eine *Halbordnung*, wenn sie reflexiv, anti-symmetrisch und transitiv ist.

Wenn M eine Menge ist und $\mathcal{P}(M)$ die Potenzmenge von M, so ist die Inklusion $\subset$ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(M)$.

(2) Funktion $f\colon X \to Y$ sind eigentlich Relationen. (ÜA)