Rainer Hempel
TU Braunschweig

SoSe 2018

Fouriertransformation und Distributionen.

Inhalt.

Kapitel I. Lokalkonvexe Räume.

¶ 1 Topologische Grundbegriffe.

¶ 2 Halbnormen und lokalkonvexe Topologien.

¶ 3 Fréchet-Räume.

¶ 4 Der Schwartzraum $\mathcal{S}$ und der Raum der temperierten Distributionen $\mathcal{S}'$.

¶ 5 Die N-Darstellung von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}'$.

¶ 6 Distributionen.

Kapitel II. Die Fouriertransformation.

¶ 7 Die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$ und auf $\mathcal{S}'$.

¶ 8 Die Fouriertransformation auf klassischen Funktionenräumen. Die Sätze von Riemann-Lebesgue, Plancherel, Bochner, und Paley-Wiener.

Kapitel III. Anwendungen.

¶ 9 Sobolev-Räume.

¶ 10 Der Laplace-Operator im $\mathbf{R}^m$.

¶ 11 Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten. Der Satz von Hörmander, Malgrange und Ehrenpreis.

¶0. Einleitung.

In der Theorie der Fourier-*Reihen* ordnet man einer 2π-periodischen Funktion $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ihre *Fourier-Koeffizienten* c_k zu,

$$c_k := (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) \mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbf{Z}, \tag{0.1}$$

und hofft oder erwartet, daß man f mit Hilfe der c_k durch

$$f(x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}, \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{0.2}$$

rekonstruieren kann; dies funktioniert aber nur unter geeigneten Voraussetzungen an f. Man betreibt hier eine *Frequenzanalyse*, d.h., jedes c_k gibt an, wie stark die k-te Frequenz zu f beiträgt.
Die *Fourier-Transformation* (FT) hat zum Ziel, diese äußerst erfolgreiche Theorie auf Funktionen auf $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{R}^m$ zu übertragen, die *keine* Periodizitätseigenschaften besitzen. Dazu benötigt man die Fourierkoeffizienten nicht nur für $k \in \mathbf{Z}$, sondern gleich für alle $k \in \mathbf{R}$; weiter muß die Summe in Gl. (0.2) durch ein Integral ersetzt werden. ZB definiert man für integrierbares f, also $f \in L_1(\mathbf{R}^m)$,

$$\hat{f}(k) := (\mathcal{F}f)(k) := (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) \mathrm{d}x, \qquad k \in \mathbf{R}^m, \tag{0.3}$$

und erwartet eine *Inversionsformel* (mit $g := \hat{f}$)

$$f(x) := (\mathcal{F}^{-1}g)(x) := (2\pi)^{-m/2} \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} g(k) \mathrm{d}k, \qquad x \in \mathbf{R}^m. \tag{0.4}$$

Die FT ist zunächst in natürlicher Weise nur auf dem Lebesgue-Raum $L_1(\mathbf{R}^m)$ definiert. Um eine hinreichend allgemeine Theorie entwickeln zu können, ist es vorteilhaft, die FT auf dem *Schwartzraum* $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ zu studieren, denn $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist eine stetige Bijektion, wenn man den VR $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ mit einer geeigneten metrischen Topologie ausstattet. Der (stetige) Dual zu $\mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ ist der *Raum der temperierten Distributionen* $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$; man erhält quasi automatisch, daß man die FT $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^m)$ zu einer stegigen Bijektion

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$$

fortsetzen kann. (Als Grundlage für diese Argumentationskette müssen wir uns zunächst mit den *lokalkonvexen topologischen Vektorräumen* und, insbesondere, den *Fréchet-Räumen* befassen.)
Da der Distributionenraum $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$ viele klassische Funktionenräume und Räume von Maßen umfaßt, hat man damit die FT auf einem hinreichend großen Grundraum erklärt. Hier ordnen sich dann leicht die klassischen Resultate ein, ZB
— $\mathcal{F}\colon L_1(\mathbf{R}^m) \to C_0(\mathbf{R}^m)$ stetig (Riemann-Lebesgue),

— $\mathcal{F}\colon L_2(\mathbf{R}^m) \to L_2(\mathbf{R}^m)$ unitär (Plancherel),
sowie der Satz von Paley-Wiener und der Satz von Bochner.
Einen Teilaspekt bildet die konkrete *Berechnung* der Fouriertransformierten für möglichst große Klassen von Beispielen, vor allem solchen mit Anwendungsbezug. Hier muß man gelegentlich auf Hilfsmittel aus der Funktionentheorie zurückgreifen (Cauchyscher Integralsatz, Residuenkalkül).
Wir wollen nun noch etwas zur Bedeutung und den Anwendungen der FT sagen.
1. Lösung partieller Differentialgleichungen: Sei P ein Polynom in m Veränderlichen mit Koeffizienten aus $\mathbf{C}$, und sei $P(D)$ der zugehörige Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten, wobei $D := \frac{1}{\mathrm{i}}\nabla$. Da die FT die Differentiation $\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\partial}{\partial x_\ell}$ in Multiplikation mit k_ℓ verwandelt, erhält man, jedenfalls formal, mit

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(k)}\mathcal{F}\right)$$

einen Kandidaten für die Inverse des Differentialoperators $P(D)$. Genauer bedeutet das: Die Gleichung

$$P(D)u = f,$$

mit f gegeben, wird durch die FT transformiert in

$$P(k)\hat{u} = \hat{f},$$

eine algebraische Gleichung. Lösung ist offenbar

$$\hat{u} = \frac{1}{P(k)}\hat{f},$$

sodaß wir mit

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{P(k)}\hat{f}\right)$$

einen Kandidaten dingfest gemacht haben, zumindest formal. Diese Idee führt in vielen Fällen schnell zum Erfolg, zB wenn P keine Nullstellen besitzt. I.a. muß man aber noch einiges an Arbeit investieren, bis man den Satz von Hörmander, Malgrange und Ehrenpreis über die Existenz einer *Grundlösung* zu $P(D)$ erreicht hat. Eine Grundlösung zum DO $P(D)$ ist eine Distribution E mit der Eigenschaft

$$P(D)E = \delta,$$

δ = Dirac-Distribution. Besitzt man eine solche Grundlösung, so findet man Lösungen der Gl. $P(D)u = f$ in der Form $u := E * f$, sofern die Faltung $*$ zwischen E und f definiert ist. Es ist dann nämlich

$$P(D)u = P(D)(E * f) = (P(D)E) * f = \delta * f = f.$$

(Weitere Stichworte in diesem Bereich: Sobolev-Räume; Integralkerne von Inversen zu Differentialoperatoren).
2. Pseudodifferentialoperatoren, Fourierintegraloperatoren.
Untersuchung von Wellenfronten bei hyperbolischen DGln.
3. Quantenmechanik, Streutheorie.
Methode der stationären Phase ([RS-III])
4. Primzahlsatz. vgl. [Rudin]
5. Stochastische Prozesse.