Rainer Hempel

Institut *Computational Mathematics*

TU Braunschweig

http://www.icm.tu-bs.de/∼hempel

Funktionalanalysis, WS 2017/18

Einleitung

Die Funktionalanalysis kombiniert Methoden der Analysis und der linearen Algebra, um ∞-dimensionale Vektorräume zu behandeln, wie sie insbesondere in der Mathematischen Physik, in der Variationsrechnung, und bei Partiellen Differentialgleichungen vorkommen. Während in der Linearen Algebra nur *endliche* Linearkombinationen auftreten, muß man in ∞-dimensionalen Räumen mit *Reihen* arbeiten. Dabei treten Konvergenzfragen auf, die mit Methoden der Analysis behandelt werden. Eine wichtige Rolle spielt auch die Geometrie, besonders bei Hilberträumen.

Ziele. Die FA studiert

— ∞-dimensionale lineare Räume X, versehen mit einer geeigneten Topologie (metrisch, normiert, ...)

— (stetige) lineare Funktionale auf X, d.h., stetige lineare Abb. $\ell : X \to \mathbb{C}$,

— lineare Operatoren zwischen ∞-dimensionalen linearen Räumen X und Y;

von besonderem Interesse ist hier das Spektrum linearer Operatoren (*Spektraltheorie*).

(1) Während der Euklidische Raum $\mathbb{R}^d$ bereits von Descartes mit Koordinaten versehen wurde, muß man in ∞-dimensionalen Räumen erst einmal Koordinaten finden (und zwar so viele, daß man Punkte trennen kann). Hier kommen die linearen Funktionale in's Spiel.

(2) In dieser Vorlesung werden wir *Metrische Räume, Banachräume* und *Hilberträume* behandeln. Die *lokalkonvexen topologischen VRe* werden wir in einer Vertiefungsvorlesung im SoSe 2018 behandeln.
Hierarchie:

$$\text{HR'e} \subset \text{BR'e} \subset \text{Fréchet-Räume} \subset \text{lokalkonvexe topol. VR'e}$$

Die ersten 3 sind metrische Räume.

(3) Lineare Abb. zwischen solchen Räumen (lineare Operatoren), wie z.Bp. Integraloperatoren, Differentialoperatoren. Spektrum und Resolvente. Kompakte Operatoren.

(4) Anwendungen der FA:

- Funktionenräume und ihre Dualräume
- Integraloperatoren, Differentialoperatoren
- selbstadjungierte Operatoren in der QM
- Fouriertransformation
- Ergodentheorie, stochastische Prozesse
- Partielle DGln., Sobolev-Räume
- Variationsrechnung
- analytische Funktionen

(Diese Anwendungen werden nur zu einem geringen Teil in dieser Vorlesung vorkommen.)

(5) Geschichte: Fredholm, Schmidt, Hilbert, Riesz, Banach, J.v. Neumann, Wiener, ... Vgl. das Buch von J. Dieudonné, "History of Functional Analysis."

Inhalt der ersten Hälfte der Vorlesung: (Entspricht einem 2+1 Modul)

1. Metrische Räume, Satz von Baire
2. Normierte Vektorräume: Banachräume und Hilberträume
3. Stetige lineare Funktionale auf BRen, schwache Konvergenz
4. Hilberträume: Darstellungssatz von Riesz, Projektionen, ONBasen

§0. Notation.

Wir verwenden die Zahlbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

(a) Mengen.

Sei X eine Menge.

$x \in X$: x ist Element von X;

$x \notin X$: x ist nicht Element von X.

$\forall x \in X$: für alle $x \in X$ gilt ...

$\exists x \in X$: es gibt ein $x \in X$, so daß gilt ...

$A \subset X$: A ist Teilmenge von X.

Für $A, B \subset X$ ist

$$A \setminus B := \{x \in A; x \notin B\}.$$

Die Menge der *geordneten Paare* (x, y) mit $x \in X$, $y \in Y$ heißt *kartesisches Produkt*,

$$X \times Y := \{(x, y); x \in X, y \in Y\};$$

das Paar (x, y) kann man zB durch $\{x, \{y\}\}$ definieren oder durch $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, etc.

Sei nun X ein topologischer Raum (zB ein metrischer Raum). Dann gilt definitionsgemäß

$$M \subset X \text{ abgeschlossen} \quad \Longleftrightarrow \quad X \setminus M \text{ offen}.$$

Für beliebiges $M \subset X$ ist $\overline{M}$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die M enthält,

$$\overline{M} = \bigcap_{\substack{X \supset N \supset M \\ X \setminus N \text{ offen}}} N.$$

(b) Funktionen.

Seien X, Y Mengen. Wir schreiben

$$f : X \to Y,$$

oder

$$x \mapsto f(x)$$

für eine Funktion von X nach Y. (Zu jedem $x \in X$ gehört genau ein Wert $y = f(x) \in Y$.) Für $A \subset X$ ist

$$f(A) := \{f(x); x \in A\} \subset Y,$$

und für $B \subset Y$,

$$f^{-1}(B) := \{x \in X; f(x) \in B\} \subset X;$$

$f(X)$ heißt der *Wertebereich* oder das *Bild* von f,

$$\operatorname{Ran} f = \{f(x); x \in X\} = f(X) \subset Y.$$

f *surjektiv* $:\Longleftrightarrow$ $f(X) = Y$;

f *injektiv* $:\Longleftrightarrow$ $(f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y)$;

f *bijektiv* $:\Longleftrightarrow$ f injektiv und surjektiv.

Die *Einschränkung* von $f : X \to Y$ auf $A \subset X$ wird mit $f \restriction_A$ bezeichnet.

Für $A \subset X$ ist χ_A die *charakteristische Funktion von* A,

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Seien X, Y topologische Räume. Eine Abb. $f : X \to Y$ heißt *stetig*, wenn gilt:

$$V \subset Y \text{ offen} \Rightarrow f^{-1}(V) \subset X \text{ offen.}$$

(c) Relationen.

0.1. Definition. Sei X Menge. Eine *Relation auf* X ist eine Teilmenge $\mathcal{R}$ von $X \times X$. Wenn $(x, y) \in \mathcal{R}$ ist, so sagen wir, daß x in $\mathcal{R}$-Relation zu y steht, i.Z.: $x\mathcal{R}y$.

0.2. Definition. Eine Relation $\mathcal{R} \subset X \times X$ heißt eine *Äquivalenzrelation*, wenn gilt:

(i) $\mathcal{R}$ ist *reflexiv* (d.h., $\forall x \in X : x\mathcal{R}x$);

(ii) $\mathcal{R}$ ist *symmetrisch* (d.h., aus $x\mathcal{R}y$ folgt $y\mathcal{R}x$);

(iii) $\mathcal{R}$ ist *transitiv* (d.h., aus $x\mathcal{R}y$ und $y\mathcal{R}z$ folgt $x\mathcal{R}z$).

Für $x \in X$ und $\mathcal{R}$ Ä.-Relation heißt die Menge der $y \in X$ mit $y\mathcal{R}x$ die *Äquivalenzklasse von* x,

$$[x] := \{y \in X; y\mathcal{R}x\}.$$

0.3. Theorem. Sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf X. Dann gehört jedes $x \in X$ zu genau einer Äquivalenzklasse. M.a.W.: X zerfällt in natürlicher Weise in disjunkte Äquivalenzklassen. (Beweis einfach)

Statt $\mathcal{R}$ schreibt man bei Äquivalenzrelationen gern $\sim$.

Die Menge der Äquivalenzklassen schreibt man $X/\mathcal{R}$.

0.4. Beispiele.

(1) Sei $X := \mathbb{Z}$ und

$$x\mathcal{R}y \;:\Longleftrightarrow\; x - y \in 3\mathbb{Z}.$$

Dann zerfällt X in die 3 Äquivalenzklassen

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}, \\
[1] &= \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}, \\
[2] &= \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}
\end{aligned}$$

(2) Die reelle projektive Gerade.

Sei $X := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(0,0)\}$. Wir definieren auf X eine Relation durch

$$x\mathcal{R}y \;:\Longleftrightarrow\; \exists \alpha \in \mathbb{R} : x = \alpha y,$$

wobei $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$ ist. Die Äquivalenzklassen kann man sich als Geraden durch den Ursprung $(0,0)$ vorstellen (ohne den Punkt $(0,0)$).

(3) Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$.

Eine Folge $(\alpha_n) \subset \mathbb{Q}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n, m \geq N_\varepsilon :\ |\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon.$$

Die Menge aller Cauchyfolgen in $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$. Wir führen auf $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ eine Relation $\mathcal{R}$ ein vermöge

$$a\mathcal{R}b \;:\Longleftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0,$$

wenn $a = (\alpha_n)$ und $b = (\beta_n)$.

Behauptung. $\mathcal{R}$ ist eine Äquivalenzrelation. (Bew. klar.)

Bem.: Die Menge der Äquivalenzklassen in $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$ ist nichts anderes als die Menge der reellen Zahlen (einschl. Metrik),

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}(\mathbb{Q})/\mathcal{R}.$$