Die Temperatur $\vartheta$ eines Körpers wird durch das Newtonsche Abkühlungsgesetz

$$\dot{\vartheta} = -k(\vartheta - \vartheta_A)$$

beschrieben, wobei $\vartheta_A$ die Außentemperatur beschreibt und $k$ die Abkühlungsrate ist. An einem sonnigen Herbsttag habe die Lufttemperatur und die Außentemperatur einer Wasserleitung um 18:00 Uhr eine Temperatur von $10°C$. Die Außentemperatur falle bis 6:00 Uhr morgens gleichmäßig auf $-2°C$ ab.

1. Wie fällt die Wassertemperatur ab, wenn man die Isolierwirkung des Rohrs vernachlässigt und $k = 1$ angenommen wird?
2. Zeigen Sie, dass das Wasser circa gegen 5:00 Uhr den Gefrierpunkt erreicht hat.
3. Wie hoch ist die Wassertemperatur ungefähr zu dem Zeitpunkt, da die Außentemperatur bereits den Gefrierpunkt erreicht hat?

**Lösung.**

Die Temperatur $\vartheta$ eines Körpers wird durch das Newtonsche Abkühlungsgesetz

$$\dot{\vartheta} = -k(\vartheta - \vartheta_A)$$

beschrieben, wobei $\vartheta_A$ die Außentemperatur beschreibt und $k$ die Abkühlungsrate ist. An einem sonnigen Herbsttag habe die Lufttemperatur und die Außentemperatur einer Wasserleitung um 18:00 Uhr eine Temperatur von $10°C$. Die Außentemperatur falle bis 6:00 Uhr morgens gleichmäßig auf $-2°C$ ab.

1. Wie fällt die Wassertemperatur ab, wenn man die Isolierwirkung des Rohrs vernachlässigt und $k = 1$ angenommen wird?
2. Zeigen Sie, dass das Wasser circa gegen 5:00 Uhr den Gefrierpunkt erreicht hat.
3. Wie hoch ist die Wassertemperatur ungefähr zu dem Zeitpunkt, da die Außentemperatur bereits den Gefrierpunkt erreicht hat?

Modellbildung. Zur Vereinfachung verschieben wir die Uhrzeit $18:00$ in den Nullpunkt. Dann ist

$$\vartheta_A(t) = 10 - t.$$

12 Stunden später, um $6:00$ morgens ist dann insbesondere $\vartheta_A(12) = -2$.

Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz bekommen wir folgende allgemeine Lösung. Wir dürfen lt. Aufgabenstellung $k = 1$ annehmen. Homogener Fall:

$$\vartheta_H(t) = ce^{-t}, c \text{ geeignet.}$$

Inhomogener Fall. Ansatz nach Art der rechten Seite liefert für das Modell einer linearen Abkühlung

$$\vartheta_p(t) = a + bt,\ a, b \text{ geeignet.}$$

$$\Rightarrow \dot{\vartheta}_p + (\vartheta_p - \vartheta_A) = b + (a + bt - 10 + t) = 0.$$
$$\Rightarrow b = -1, a = 11.$$

Damit lautet die Lösung

$$\vartheta(t) = ce^{-t} + 11 - t, c \text{ geeignet.}$$

1. Wir wissen, dass
$$10 = \vartheta(0) = c + 11 \Rightarrow \vartheta(t) = -e^{-t} + 11 - t.$$
   Damit haben wir die Abkühlung im Rohr in der Zeit von $18:00$ $(t = 0)$ bis $6:00$ morgens $(t = 12)$ beschrieben.
2. $5:00$ entspricht $t = 11$. Wir erhalten
$$\vartheta(11) = -e^{-11} \approx 0.$$
   Wir vernachlässigen dabei den Term $-e^{-11}$, der sowieso fast Null ist.

3. Wir haben angenommen, dass die Außentemperatur zwischen 18 : 00 und 6 : 00 morgens gleichmäßig abnimmt. Demnach erreicht die Außentemperatur um 4 : 00 den Gefrierpunkt, also 10 Stunden später. Zu diesem Zeitpunkt ist

$$\vartheta(10) = -e^{-10} + 1.$$

D.h. das Wasser ist knapp ein Grad über dem Gefrierpunkt.