Gegeben sei das sogenannte Verfahren von Heun

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h_i}{2}\left(f(t_i,\ u_i) + f(t_i + h_i,\ u_i + h_i f(t_i, u_i))\right)$$

zur Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t, y), y(t_0) = y_0$.

1. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung.
2. Konvergiert das Verfahren? Wenn ja, mit welcher Ordnung?
3. Ist das Verfahren damit genauer als das Euler–Verfahren bei fester Schrittweite h?

Lösung.

1. Zur Bestimmung der Konsistenzordnung machen wir eine Taylorentwicklung von $g(h) = f(t + h,\ y + hf(t, y))$. Es gilt (siehe Vorlesung)

   $$\dot{y} = f(t, y),\ \ddot{y} = f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y).$$

   Dies folgt sofort aus der Kettenregel. Dabei bezeichnen $f_t(t, y)$ und $f_y(t, y)$ die partiellen Ableitungen nach t bzw. y.

   Damit erhalten wir

   $$\begin{aligned} g(h) &= g(0) + hg'(0) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= f(t, y) + h\left(f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)\right) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

   Damit bekommen wir sofort als lokalen Diskretisierungsfehler

   $$\begin{aligned} \tau(t, h) &= \frac{y(t + h) - y(t)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(t,\ y) + f(t + h,\ y + hf(t, y))\right) \\ &= \frac{y(t) + h\dot{y}(t) + \frac{h^2}{2}\ddot{y}(t) + \mathcal{O}(h^3) - y(t)}{h} - \frac{1}{2}\left(f(t,\ y) + f(t + h,\ y + hf(t, y))\right) \\ &= f(t, y) + \frac{h}{2}\ddot{y}(t) + \mathcal{O}(h^2) - \frac{1}{2}\left(f(t,\ y) + f(t + h,\ y + hf(t, y))\right) \\ &= f(t, y) + \frac{h}{2}\ddot{y}(t) + \mathcal{O}(h^2) - \frac{1}{2}\big(f(t,\ y) + f(t, y) + h\left(f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)\right) + \mathcal{O}(h^2)\big) \\ &= \frac{h}{2}\ddot{y}(t) + \mathcal{O}(h^2) - \frac{h}{2}\big(f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y) + \mathcal{O}(h^2)\big) \\ &= \frac{h}{2}\left(f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y)\right) + \mathcal{O}(h^2) - \frac{h}{2}\big(f_t(t, y) + f_y(t, y)f(t, y) + \mathcal{O}(h^2)\big) \\ &= \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

   Damit haben wir uns jetzt davon überzeugt, dass das Verfahren MINDESTENS Ordnung 2 hat.

   Streng genommen bestände noch die Möglichkeit, dass das Verfahren die Ordnung 3 hat. Dazu müssen wir die Taylorentwicklung für y und g jeweils eine Ordnung weiter entwickeln.

   Einmal haben wir in Falle von g

   $$\frac{h^2}{2}g''(0) \quad = \quad \frac{h^2}{2}y'''(0).$$

   Andererseits haben wir bei y das Glied

   $$\frac{h^2}{6}y'''(t).$$

   Beide Glieder sind verschieden. Damit ist die Ordnung 2.

2. Laut Vorlesung gilt (im Falle einer Lipschitzbedingung, die wir für f annehmen können): Konsistenzordnung = Konvergenzordnung. Also Konvergenz der Ordnung 2.

3. Für $h \to 0$ verhält sich der Fehler wie $\mathcal{O}(h^2)$ und ist damit eine Größenordung kleiner als das Euler–Verfahren.