Zwei Modellprobleme

Eindimensionales elliptisches Randwertproblem

$$\begin{aligned} -u''(x) &= f(x),\ x \in [0,1] \\ u(0) &= g_0,\ u(1) = g_1 \end{aligned}$$

Zweidimensionales elliptisches Randwertproblem

$$\begin{aligned} \Omega &= [0,1] \times [0,1] \\ \overbrace{-u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y)}^{-\Delta u(x,y)} &= f(x,y),\ (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= g(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

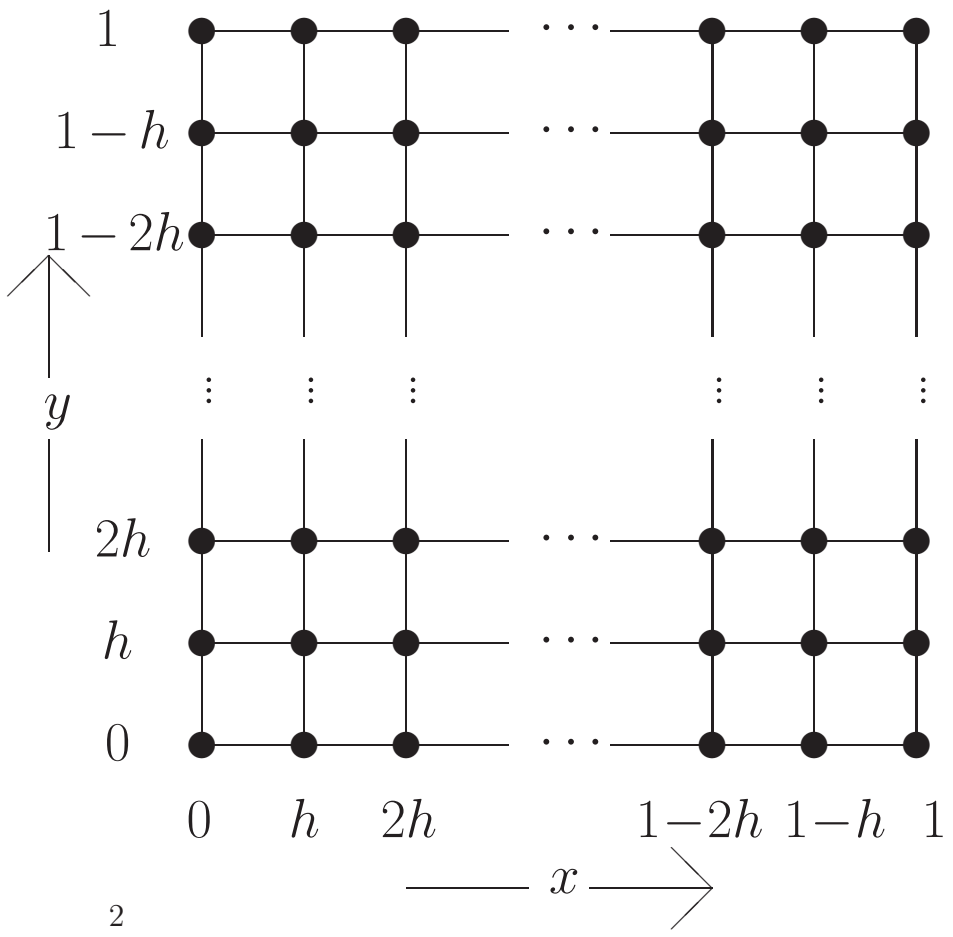
Diskretisierung mittels Finiter Differenzen

1D–Problem: $h = \frac{1}{N+1}$. $\quad [0,1] \to \Omega_h = \{0, h, 2h, \ldots, 1-h, 1\}$

2D–Problem:

$\Omega = [0,1]^2 \to \Omega_h =$

$\{(k,l)h : \ k,l = 0, \ldots N+1\}$



Diskretisierung mittels Finiter Differenzen

1D Randwertproblem

Differentialgleichung

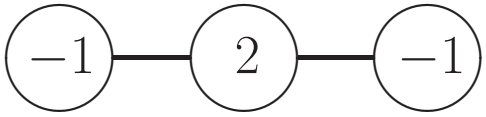
$$-y''(x) = f(x),\ y(0) = g_0, y(1) = g_1$$

$$\downarrow$$

Differenzengleichung

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i, u_0 = g_0, u_{N+1} = g_1,\ \text{wobei } u_i \equiv u(ih)\ \forall i$$

Differenzenstern



Lineares Gleichungssystem

$$T_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow T_h u = f.$$

Diskretisierung mittels Finiter Differenzen

2D Randwertproblem

Differentialgleichung

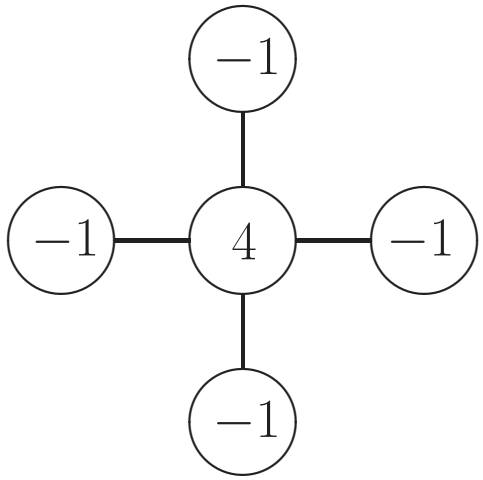
$$-\Delta y(x,y) = f(x,y), \text{ in } \Omega = [0,1]^2, \; y = g \text{ auf } \partial\Omega$$

$$\downarrow$$

Differenzengleichung

$$\frac{-u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + 4u_{ij} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1}}{h^2} = f_{ij}$$

Differenzenstern



Lineares Gleichungssystem

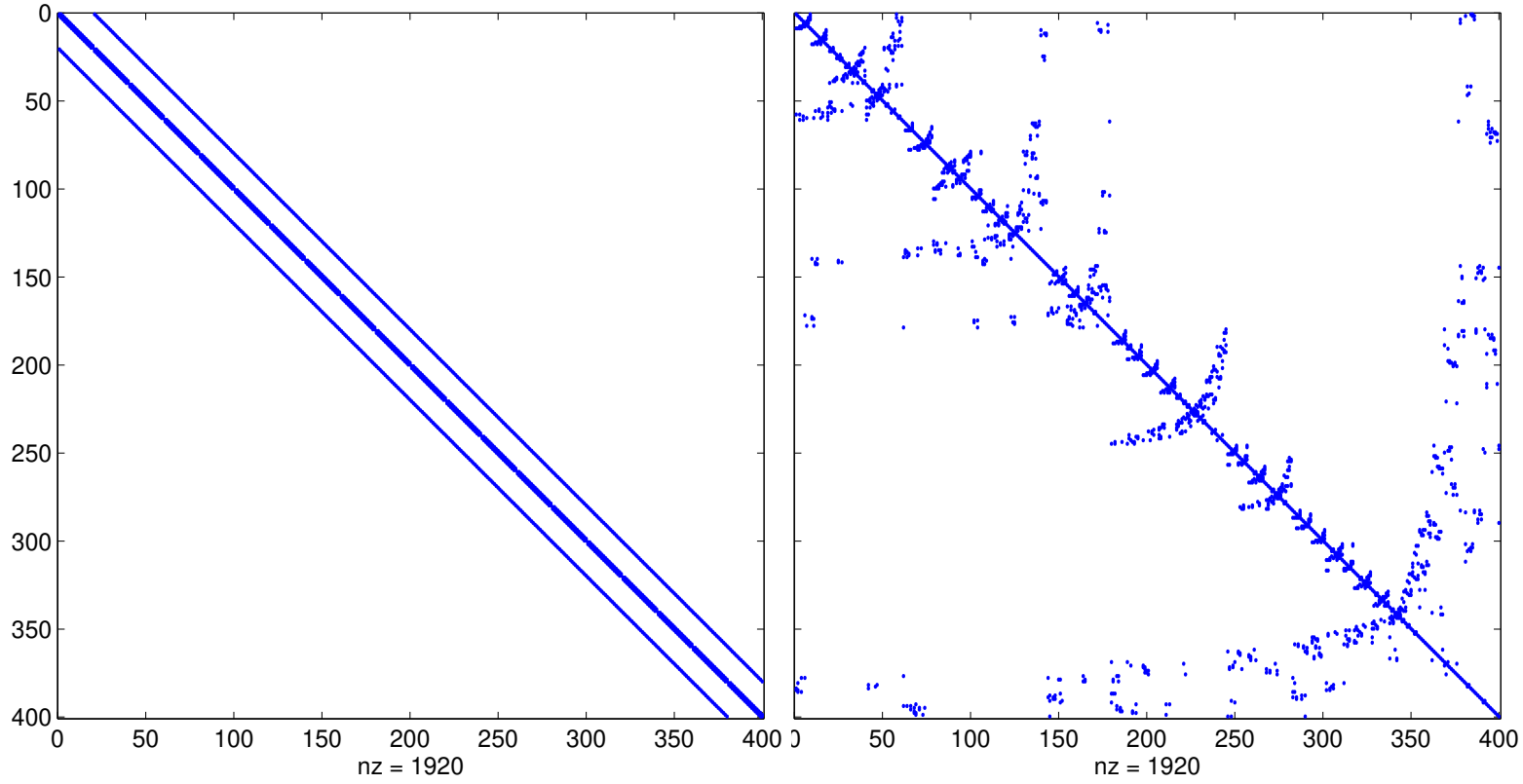
$$A_h u = f$$

Elementare Lösungstechniken — Direkter Löser

1D/2D RWP: Matrix schwach besetzt, symmetrisch positiv definit

Angepasster direkter Löser $A = LL^\top$, Cholesky–Zerlegung

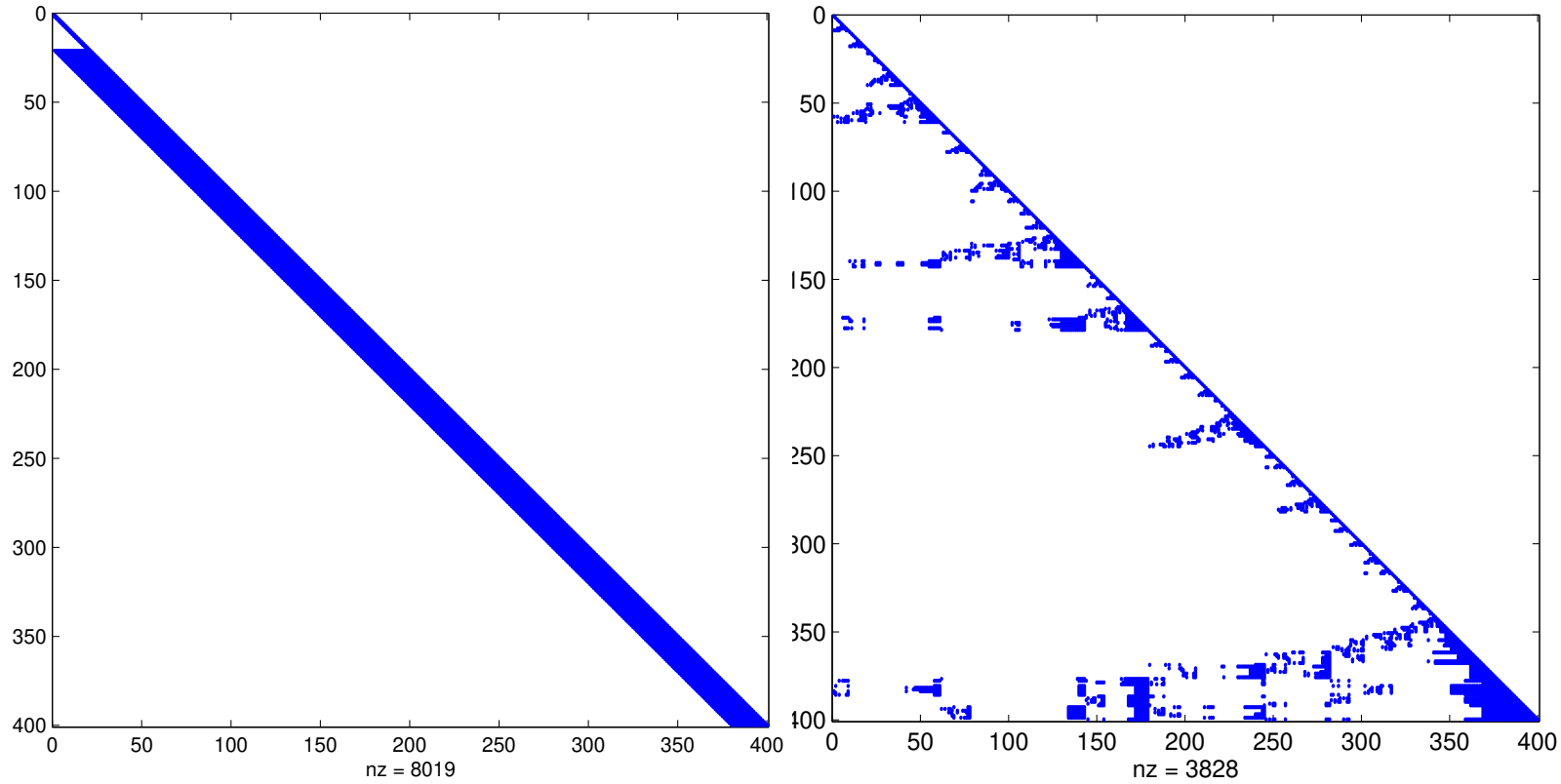
Dabei Matrixeinträge umordnen ("symmetric minimum degree")



Direkter Löser

2D Randwertproblem

Dreiecksfaktoren L aus Choleskyzerlegung



Direkter Löser

2D Randwertproblem

h	Problemgröße	Rechenzeit (flops)	Speicherbedarf (Nichtnullel.)
$\frac{1}{31}$	961	$2.68 \cdot 10^5$	$1.11 \cdot 10^4$
$\frac{1}{63}$	3969	$2.95 \cdot 10^6$	$6.55 \cdot 10^4$
$\frac{1}{127}$	16129	$2.89 \cdot 10^7$	$3.56 \cdot 10^5$
$\frac{1}{255}$	65025	$2.92 \cdot 10^8$	$1.89 \cdot 10^6$

- Rechenzeit wächst mehr als linear
  (Faktor 10 bei Vervierfachung der Problemgröße)
- Speicherbedarf wächst mehr als linear
  (Faktor 6 bei Vervierfachung der Problemgröße)

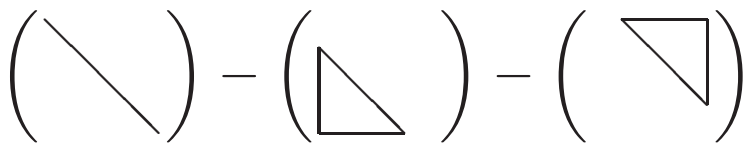
Elementare Lösungstechniken — Iterativer Löser

Grunditerationsverfahren.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + B^{-1}(b - Ax^{(k)}), \forall k, \quad x^{(0)} = 0.$$

Zerlegung von A

$$A = D - E - E^\top =$$



Mögliche Approximationen B an A.

B	D	$D - E$	$(D - E)D^{-1}(D - E^\top)$
Bezeichnung	Jacobi	Gauß–Seidel	symmetrisches Gauß–Seidel

Iteration stoppen, falls $\|b - Ax^{(k)}\|_\infty \leqslant 10^{-8}\|b\|_\infty$.

Einfache Iterativer Löser

2D Randwertproblem

		Jacobi		Gauß–Seidel	
h	Problem–größe	Rechenzeit (flops)	Anzahl Iterationen	Rechenzeit (flops)	Anzahl Iterationen
$\frac{1}{31}$	961	$5.43 \cdot 10^7$	3834	$3.43 \cdot 10^7$	1918
$\frac{1}{63}$	3969	$9.06 \cdot 10^8$	15354	$5.73 \cdot 10^8$	7678
$\frac{1}{127}$	16129	$1.48 \cdot 10^{10}$	61432	$9.37 \cdot 10^9$	30717

- Ergebnis niederschmetternd, schlimmer als direkter Löser
- Rechenzeit wächst mehr als linear
  (Faktor 16 bei Vervierfachung der Problemgröße)
- Anzahl Iterationen wächst!
  (Faktor 4 bei Vervierfachung der Problemgröße)

Iterativer Löser — Polynomielle Verfahren

A symmetrisch positiv definit $\Rightarrow$ verwende vorkond. *cg*–Verfahren.

2D Randwertproblem

		Jacobi Vork.		sym. Gauß–Seidel Vork.	
h	Problem–größe	Rechenzeit (flops)	Anzahl Iterationen	Rechenzeit (flops)	Anzahl Iterationen
1/31	961	$1.29 \cdot 10^6$	59	$1.16 \cdot 10^6$	34
1/63	3969	$1.09 \cdot 10^7$	120	$9.08 \cdot 10^6$	64
1/127	16129	$9.06 \cdot 10^7$	245	$7.00 \cdot 10^7$	121
1/255	65025	$7.45 \cdot 10^8$	499	$5.09 \cdot 10^8$	218

- Ergebnis deutlich besser, aber immer noch unbefriedigend
- Rechenzeit wächst weiterhin mehr als linear, Iterationszahl steigt!
- Approximation an die Ausgangsmatrix anscheinend zu grob

Iterativer Löser — Unvollst. Dreieickszerl.

1 Schritt Cholesky:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & v^\top \\ v & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ v & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & v^\top \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

wobei $S = B - \frac{vv^\top}{\alpha}$ Schur–Komplement. Wiederhole Vorgang für S.

$$S = \tilde{L}\tilde{D}^{-1}\tilde{L}^\top \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ v & \tilde{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \tilde{D} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha & v^\top \\ 0 & \tilde{L}^\top \end{pmatrix},$$

Unvollständige Zerlegung. Ersetze S:

$$S \longrightarrow \tilde{S}$$

wobei $\tilde{S}$ identisch mit S, dort wo B von Null verschieden ist.

Liefert approximative Zerlegung von A.

$$A \approx (\hat{D} - \hat{E})\hat{D}^{-1}(\hat{D} - \hat{E})^\top.$$

“ICHOL(0)” (bzw. ILU(0) im unsymmetrischen Fall).

Iterativer Löser — Unvollst. Dreieickszerl.

ICHOL(0) als Vorkond. für das cg–Verfahren

2D Randwertproblem

		ICHOL(0) Vork.	
h	Problem–größe	Rechenzeit (flops)	Anzahl Iterationen
1/31	961	$9.40 \cdot 10^5$	29
1/63	3969	$7.40 \cdot 10^6$	55
1/127	16129	$5.69 \cdot 10^7$	104
1/255	65025	$4.51 \cdot 10^8$	204

- Ergebnis etwas besser als sym. Gauß–Seidel, trotzdem unbefriedigend
- Verfahren skaliert immer noch nicht

Elementare Lösungstechniken

Zusammenfassung

- Direkte Löser
  - $\oplus$ Keine Konvergenzprobleme
  - $\ominus$ hohen Speicherbedarf
  - $\ominus$ Rechenzeit
- Einfache Iterationsverfahren (Jacobi, Gauß–Seidel)
  - $\oplus$ geringer Speicherbedarf
  - $\ominus$ große Konvergenzprobleme
  - $\ominus$ Enorme Rechenzeit
- cg mit Vorkond. (ICHOL(0), symm. Gauß–Seidel)
  - $\oplus$ geringer Speicherbedarf
  - $\ominus$ Konvergenzprobleme für große n
  - $\ominus$ Rechenzeit für große n

Glättungsanalyse

Warum sind elementare Verfahren so schlecht?

Der Einfachheit halber: 1D–Problem, Jacobi $B = \frac{2}{h^2} I$, Grunditeration.

Fehler $e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)}$ der Gleichung $T_h x = b$.

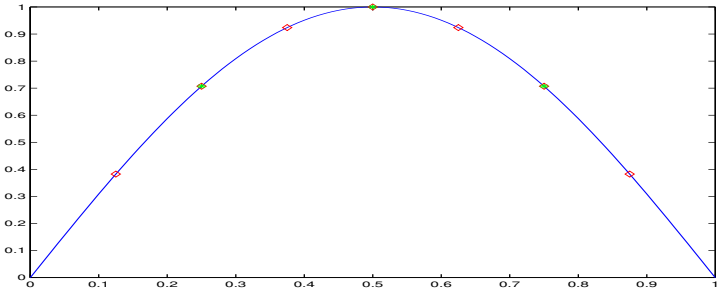
$$e^{(k+1)} = x - x^{(k+1)} = x - \left[x^{(k)} + \frac{h^2}{2}(T_h x - T_h x^{(k)}) \right] = (I - \frac{h^2}{2} T_h) e^{(k)}$$

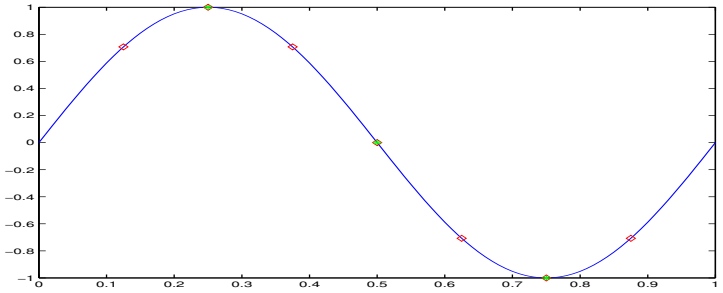
Zur Analyse verwende für $e^{(k)}$ die Eigenvektoren von T_h.

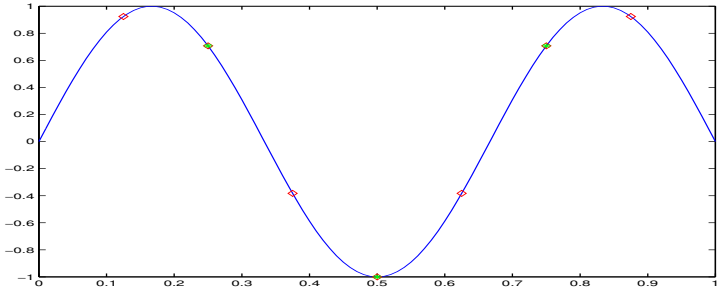
Eigenvektoren $s^{(k)}$ von T_h: Restriktion von $s^{(k)}(x) = \sin(k\pi x)$ auf Ω_h, $\forall k$.

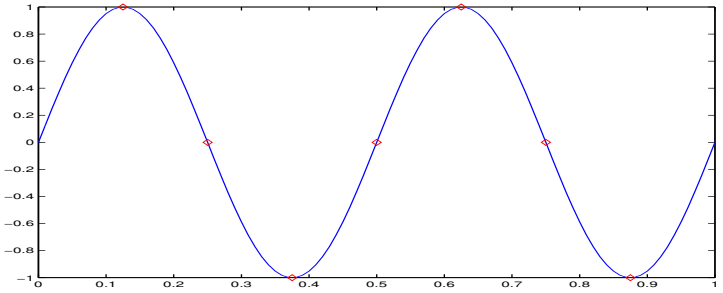
Zughehörige Eigenwerte: $\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}, \ \forall k$

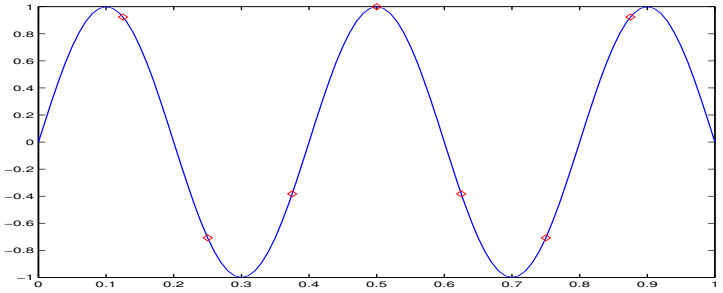
Glättungsanalyse — Eigenvektoren

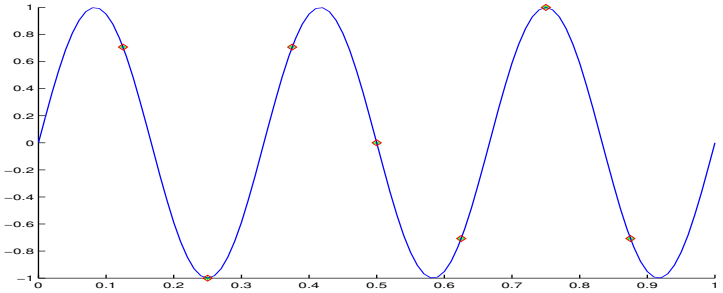


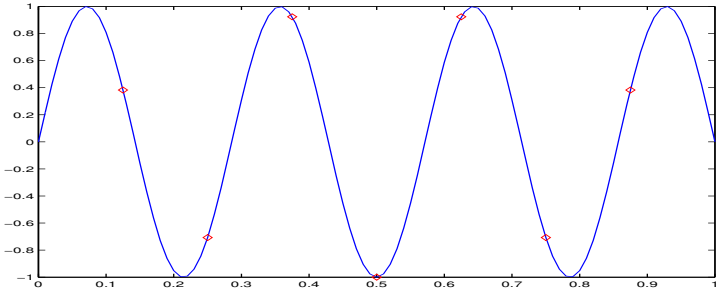










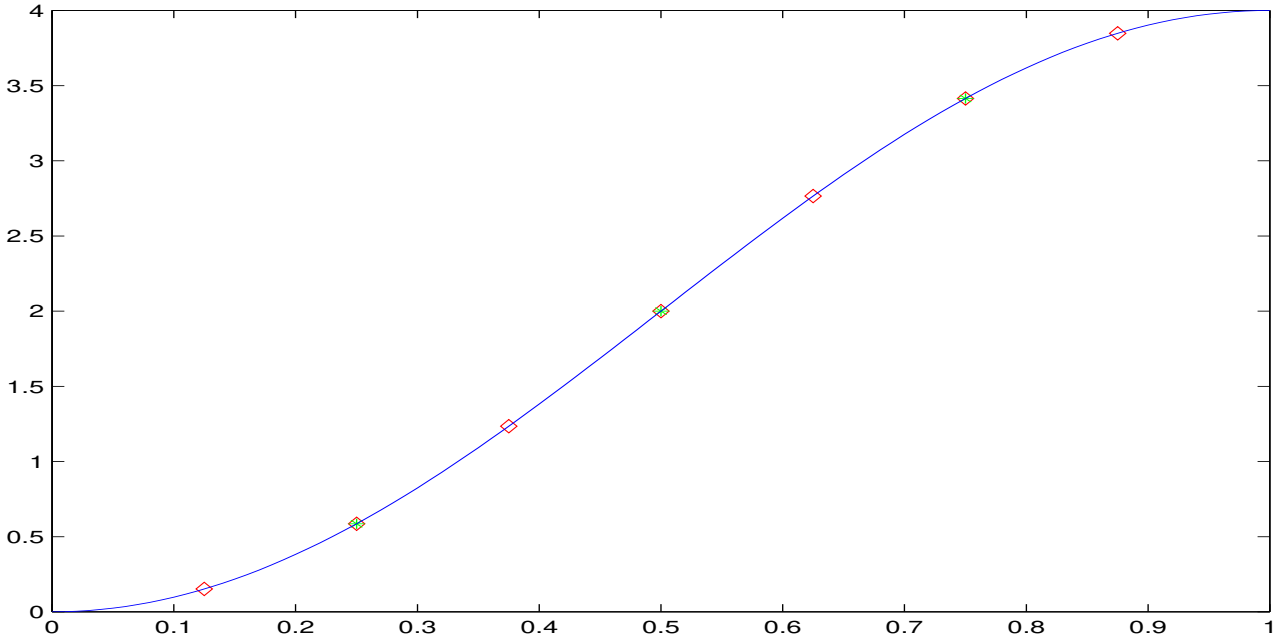


Glättungsanalyse — Eigenvektoren

Beobachtung. Bei höherer Diskretisierung $N \longrightarrow 2N$:

- niedrige Frequenzen bleiben erhalten
- höhere Frequenzen kommen hinzu

Eigenwerte (bis auf den Faktor $\frac{1}{h^2}$)

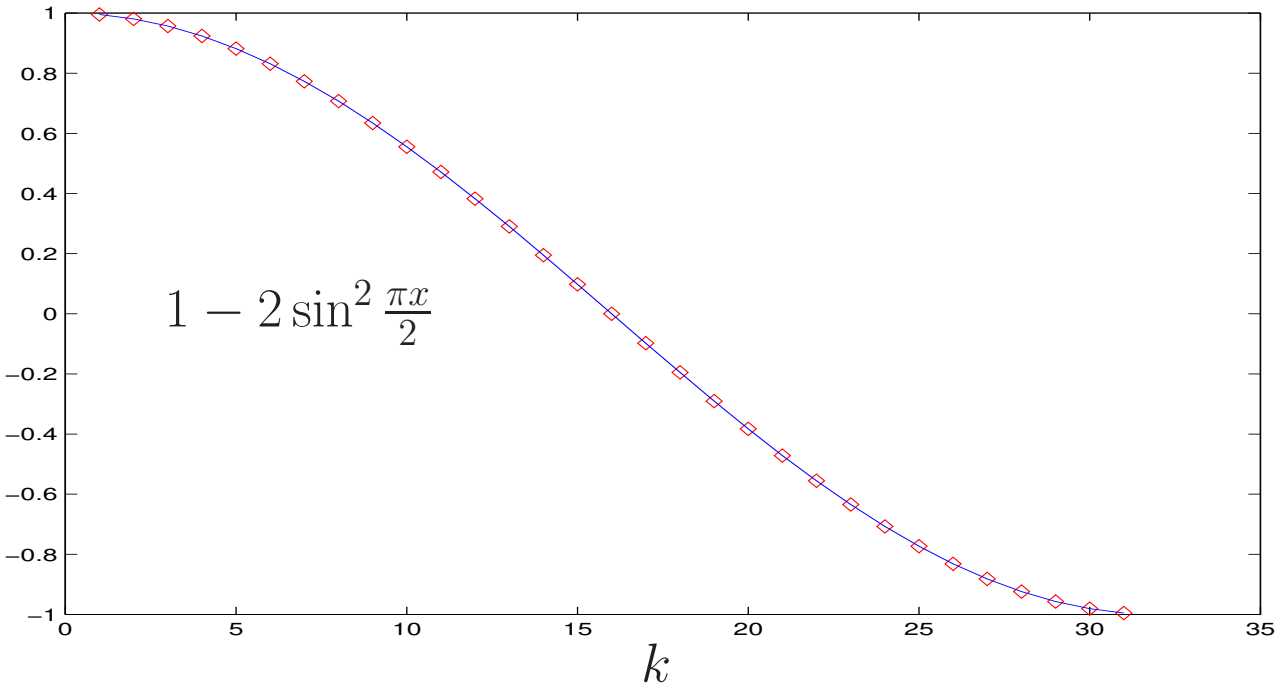


Glättungsanalyse — Jacobi–Verfahren

Schreibe Fehler e als $e = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k s^{(k)}$

$$(I - \frac{h^2}{2} T_h) e = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (s^{(k)} - \frac{h^2}{2} T_h s^{(k)}) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(1 - 2\sin^2 \frac{k\pi h}{2}\right) s^{(k)}.$$

Dämpfungsfaktoren $\left|1 - 2\sin^2 \frac{k\pi h}{2}\right|$ für die Eigenvektoren



Glättungsanalyse — Jacobi–Verfahren

Beobachtung.

- Frequenzen im mittleren Bereich (um $\frac{N}{2}$) werden stark gedämpft,
- keine Dämpfung für niedrige Frequenzen oder hohe Frequenzen

Steuere Dämpfungsverhalten durch Dämpfungsparameter ω, $B \to \frac{1}{\omega}B$.

Im Falle des Jacobi–Verfahrens

$$(I - \frac{\omega h^2}{2} T_h)e = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (s^{(k)} - \frac{\omega h^2}{2} T_h s^{(k)}) = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(1 - 2\omega \sin^2 \frac{k\pi h}{2}\right) s^{(k)}.$$

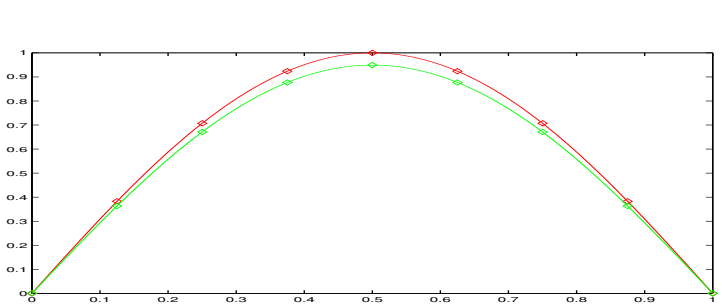
Optimiere ω für hohe Frequenzen ($k \geqslant \frac{N}{2}$)

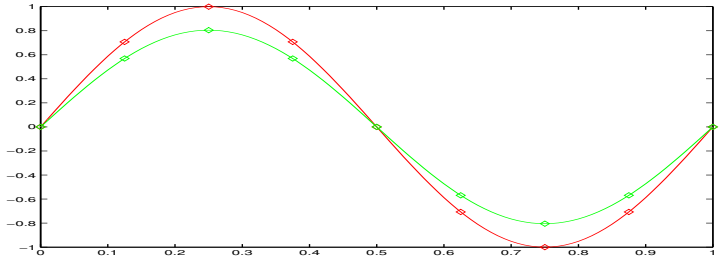
$$\max_{k>\frac{N}{2}} |1 - 2\omega \sin^2 \frac{k\pi h}{2}| = \min$$

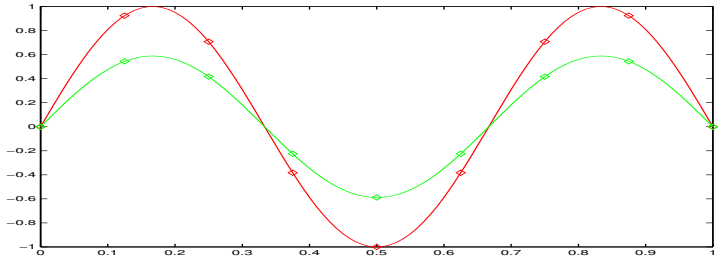
$$\Longrightarrow \omega = \frac{2}{3}, \quad \max_{k>\frac{N}{2}} |1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{k\pi h}{2}| \leqslant \frac{1}{3}$$

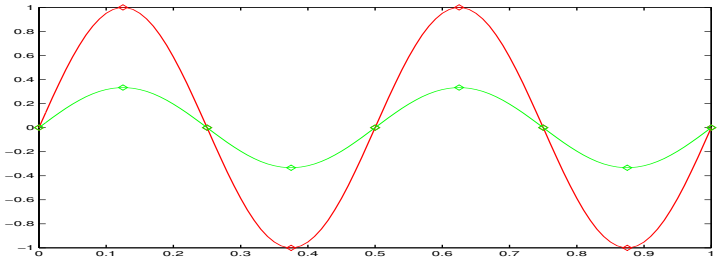
Glättungsanalyse — Jacobi–Verfahren

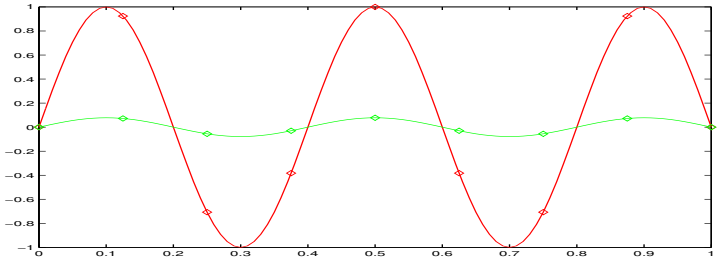
Geglättete Eigenvektoren vorher und nachher

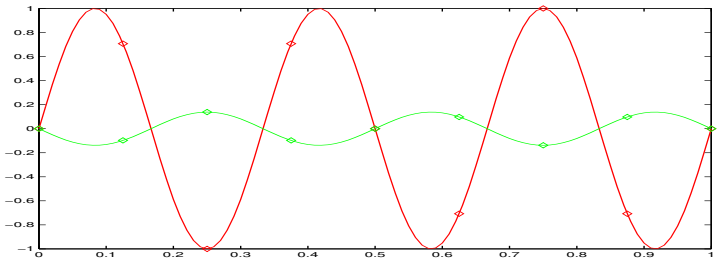


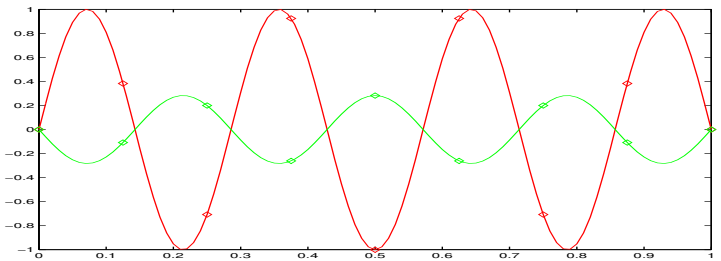












Glättungsanalyse — Zusammenfassung

Beobachtungen.

- ungedämpftes Jacobi–Verfahren glättet nur Frequenzen im mittleren Bereich
- gedämpftes ($\omega = \frac{2}{3}$) Jacobi–Verfahren dämpft hohe Frequenzen
- Praktisch keine Dämpfung bei niedrigen Frequenzen
- **ABER:** Niedrigen Frequenzen treten bei Problem T_{2h} der Dimension $2h$ wieder auf
- Konsequenz. Brauchen zusätzlichen Korrekturschritt, der die glatten Anteile reduziert.
  Idee: Verwende hierzu gröberes Gitter Ω_{2h} und T_{2h}.

Grobgitterkorrektur

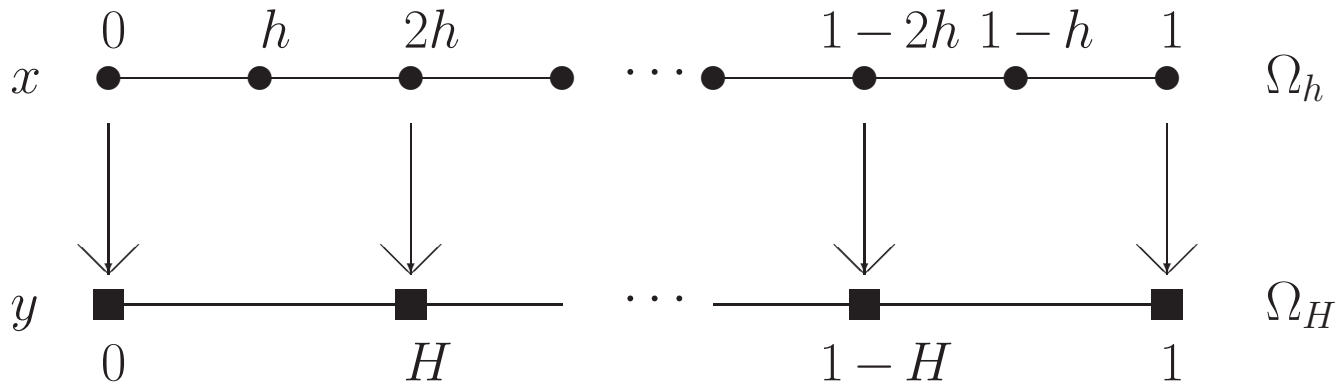
Glättungsschritt benötigt zusätzlichen Grobgitterkorrekturschritt.

$H = 2h$, Übergang von $\Omega_h \longrightarrow \Omega_H$ Restriktion
$\Omega_H \longrightarrow \Omega_h$ Prolongation

$x \in \Omega_h$, Werte auf dem Gitter $x(h), \ldots, x((N-1)h)$

$y \in \Omega_H$, Werte auf dem Gitter $y(H), \ldots, y(\frac{N-1}{2}H)$

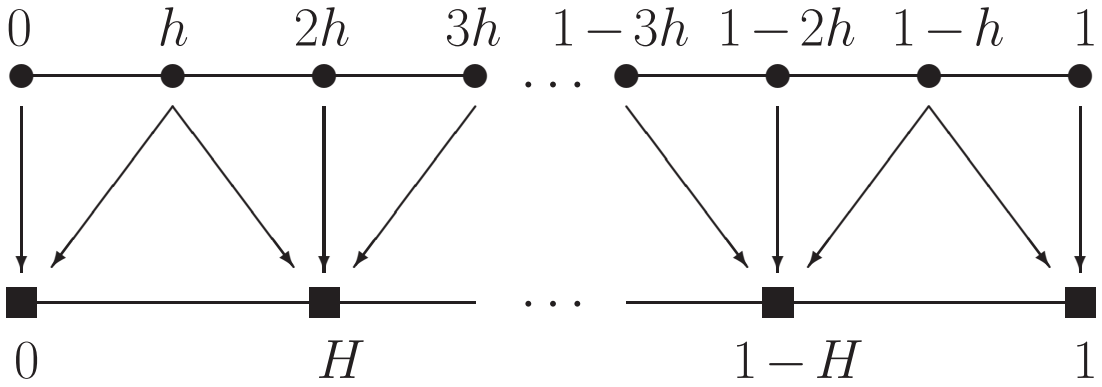
Triviale Restriktion schlecht: $y(iH) = x(iH) = x(2ih), \ \forall i$

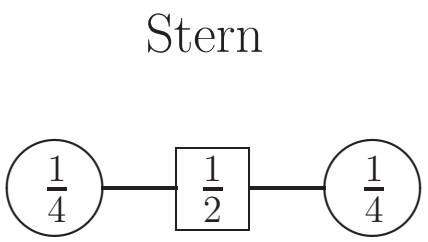


Grobgitterkorrektur — Gitterübergang

Restriktion R. Mittellung über die Nachbarn

$$y(iH) = \frac{1}{4}x(iH-h) + \frac{1}{2}x(iH) + \frac{1}{4}x(iH+h),\ \forall i$$





Prolongation P. Lineare Interpolation.

$$x(ih) = \begin{cases} y(jH) & \text{falls } i = 2j \\ \frac{1}{2}y(jH) + \frac{1}{2}y(jH+H) & \text{falls } i = 2j+1 \end{cases},\ \forall i$$

Prinzip der Restriktion wird umgekehrt. $P = 2R^{\top}$

Zweigitterverfahren

Kombination Jacobi (gedämpft) / Grobgitterkorrektur $T_h^{-1} \approx P T_H^{-1} R$.

$$\begin{aligned} x_h^{(k+\frac{1}{2})} &= x_h^{(k)} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{h^2}{2}(b_h - T_h x_h^{(k)}) \\ x_h^{(k+1)} &= x_h^{(k+\frac{1}{2})} + P_h T_H^{-1} R_h (b_h - T_h x_h^{(k+\frac{1}{2})}) \end{aligned}$$

Bisher: für T_H Gleichungssystem lösen (z.B. mit Cholesky)

Ausweg: wende die Zweigitter–Verfahren wiederum (rekursiv) auf T_H an

Für $b_H = R_h(b_h - T_h x_h^{(k+\frac{1}{2})})$, ersetze $T_H x_H = b_H$ durch

$$\left.\begin{aligned} x_H^{(\frac{1}{2})} &= x_H^{(0)} + \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{H^2}{2}(b_H - T_H x_H^{(0)}) \\ x_H^{(1)} &= x_H^{(\frac{1}{2})} + P_H T_{2H}^{-1} R_H (b_H - T_H x_H^{(\frac{1}{2})}) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x_h^{(k+1)} \approx x_h^{(k+\frac{1}{2})} + P_h x_H^{(1)}$$

Problemreduktion $h \longrightarrow 2h = H \longrightarrow 2H = 4h \longrightarrow \cdots$

Mehrgitterverfahren

Hierarchische Gitter $\Omega_{h_1} \subseteq \Omega_{h_2} \subseteq \cdots \subseteq \Omega_{h_l}$, z.B. $h_{s+1} = h_s/2$, $\forall s$

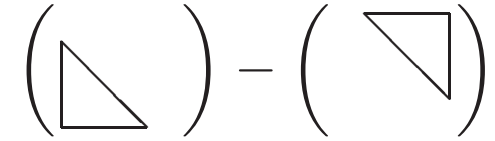
Zu jedem Gitter Ω_{h_s} diskretisierte Gleichung $A_{h_s} x_{h_s} = b_{h_s}$

Zwischen den Gittern Übergange

$$\begin{array}{ll} \Omega_{h_s} \longrightarrow \Omega_{h_{s-1}} & \text{Restriktion } R_s \\ \Omega_{h_{s-1}} \longrightarrow \Omega_{h_s} & \text{Prolongation } P_s \end{array}$$

Auf jedem Gitter Glätter S_{h_s}, z.B. mit Hilfe Zerlegung von A_{h_s}

$$A_{h_s} = D_{h_s} - E_{h_s} - E_{h_s}^\top =$$



Wähle z.B. $S_{h_s} = \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot D_{h_s}$ (gedämpftes Jacobi–Verf.)

oder $S_{h_s} = D_{h_s} - E_{h_s}$ (Gauß–Seidel)

oder $S_{h_s} = (D_{h_s} - E_{h_s}) D_{h_s}^{-1} (D_{h_s} - E_{h_s}^\top)$ (symm. Gauß–Seidel)

Mehrgitterverfahren — Algorithmus

Gegeben: h_s für ein $s \in \{1, 2, \ldots, l\}$, rechte Seite b_{h_s}, Näherung x_{h_s}

Mehrgitterschritt berechnet rekursiv neue Näherung y_{h_s}

Falls $s = 1$, löse $A_{h_1} y_{h_1} = b_{h_1}$ direkt.

Sonst $y_{h_s} := x_{h_s}$

Vorglättung

Für $k = 1, 2, \ldots, \nu_1$

$y_{h_s} := y_{h_s} + S_{h_s}^{-1}(b_{h_s} - A_{h_s} y_{h_s})$

Grobgitterkorrektur

Für $k = 1, 2, \ldots, \mu$

$x_{h_{s-1}} := 0, b_{h_{s-1}} := R_s(b_{h_s} - A_{h_s} y_{h_s})$

Rufe *Mehrgitterschritt* auf mit $h_{s-1}, b_{h_{s-1}}, x_{h_{s-1}}$

$\rightarrow$ Ergebnis y_{h_s}.

$y_{h_s} := y_{h_s} + P_s y_{h_{s-1}}$

Nachglättung

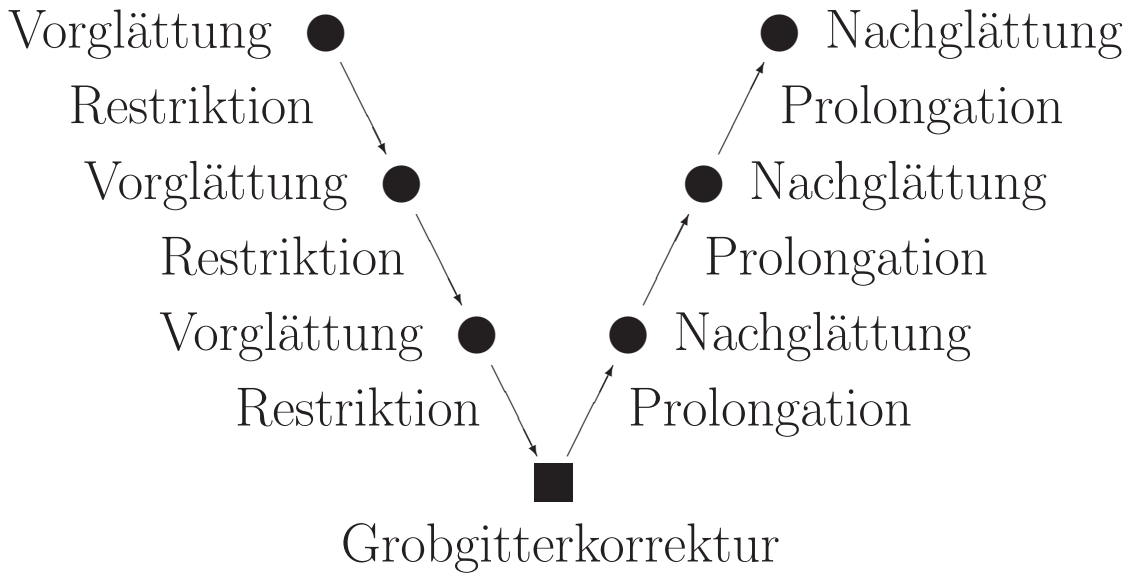
Für $k = 1, 2, \ldots, \nu_2$

$y_{h_s} := y_{h_s} + S_{h_s}^{-1}(b_{h_s} - A_{h_s} y_{h_s})$

Mehrgitterverfahren — Anmerkungen

- Bei mehrmaliger Anwendung nur Summe $\nu = \nu_1 + \nu_2$ benötigt.
- *Mehrgitterschritt* für $\mu = 1$ rekursiven Aufruf für $\Omega_{h_s} \rightarrow$ "V–Zyklus"
- *Mehrgitterschritt* für $\mu = 2$ rekursive Aufrufe für $\Omega_{h_s} \rightarrow$ "W–Zyklus"

Schema eines Mehrgitterschrittes "V–Zyklus"



Mehrgitterverfahren — 1D Fall

1D Randwertproblem, Mehrgitterverfahren

	V–Zykl.,$\nu = 1$		V–Zykl.,$\nu = 2$		W–Zykl.,$\nu = 1$		W–Zykl.,$\nu = 2$	
h	Zeit (flops)	Anz. Iter.	Zeit (flops)	Anz. Iter.	Zeit (flops)	Anz. Iter.	Zeit (flops)	Anz. Iter.
$\frac{1}{511}$	$5.8{\cdot}10^5$	21	$5.7{\cdot}10^5$	15	$2.4{\cdot}10^6$	17	$1.6{\cdot}10^6$	9
$\frac{1}{1023}$	$1.2{\cdot}10^6$	21	$1.2{\cdot}10^6$	16	$5.5{\cdot}10^6$	17	$3.7{\cdot}10^6$	9
$\frac{1}{2047}$	$2.5{\cdot}10^6$	22	$2.4{\cdot}10^6$	16	$1.2{\cdot}10^7$	16	$9.2{\cdot}10^6$	10
$\frac{1}{4095}$	$4.9{\cdot}10^6$	22	$4.9{\cdot}10^6$	16	$2.6{\cdot}10^7$	16	$1.8{\cdot}10^7$	9

- Verfahren skaliert linear!
- Mehr Glättung → weniger Iterationen, aber teurer
- W–Zyklus hier aufwendiger, dafür weniger Iterationen

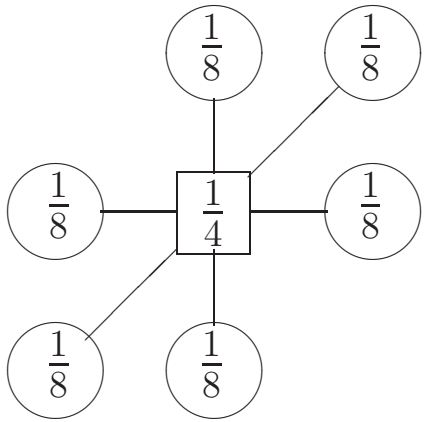
Mehrgitterverfahren im 2D–Fall

$x \in \Omega_h$, $y \in \Omega_H$. Werte auf dem Gitter $x(ih, jh)$, $y(kH, lH)$ $\forall i, j, k, l$.

Übertragung Restriktion: $\forall i, j$

$$\begin{aligned} y(iH, jH) \;=\; & \frac{1}{4}x(iH, jH) + \frac{1}{8}\,[x(iH - h, jH) + x(iH + h, jH) \\ & + x(iH, jH - h) + x(iH, jH + h) \\ & + x(iH - h, jH - h) + x(iH + h, jH + h)] \end{aligned}$$

In Form eines Sternes



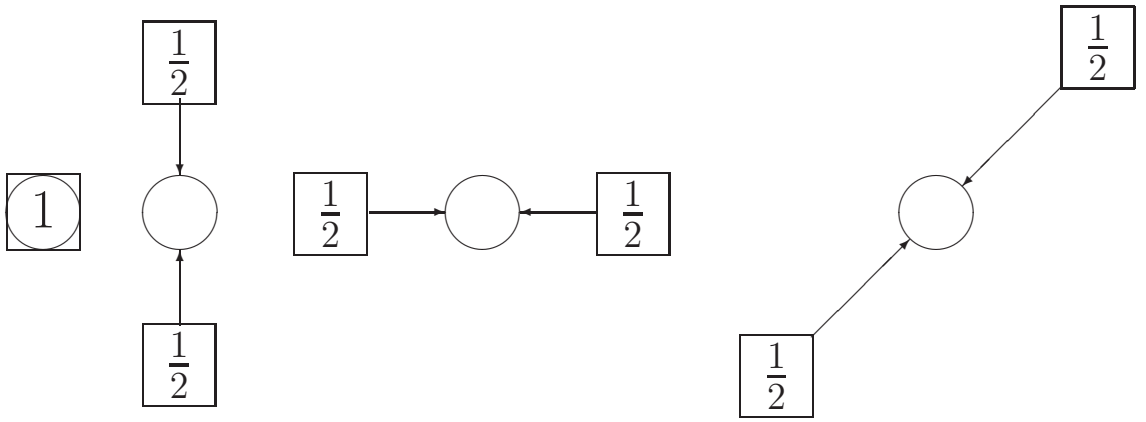
Ein weiteres Beispiel wäre die fehlenden Nachbarn auch mit einzubeziehen.

Mehrgitterverfahren im 2D–Fall

Hierzu passende Prolongation.

$$x(ih,jh) = \begin{cases} y(kH,lH) & i=2k, j=2l \\ \frac{1}{2}\left[y(kH,lH)+y(kH+H,lH)\right] & i=2k+1, j=2l \\ \frac{1}{2}\left[y(kH,lH)+y(kH,lH+H)\right] & i=2k, j=2l+1 \\ \frac{1}{2}\left[y(kH,lH)+y(kH+H,lH+H)\right] & i=2k+1, j=2l+1 \end{cases}$$

Zugehörige Sterne



Mehrgitterverfahren im 2D–Fall

2D Randwertproblem, Mehrgitterverfahren

	Cholesky	V–Zykl.,$\nu = 2$		W–Zykl.,$\nu = 2$	
h	Zeit (flops)	Zeit (flops)	Anz. Iter.	Zeit (flops)	Anz. Iter.
$\frac{1}{31}$	$2.7{\cdot}10^5$	$1.7{\cdot}10^6$	26	$2.3{\cdot}10^6$	20
$\frac{1}{63}$	$3.0{\cdot}10^6$	$7.7{\cdot}10^6$	27	$1.0{\cdot}10^7$	20
$\frac{1}{127}$	$2.9{\cdot}10^7$	$3.2{\cdot}10^7$	27	$4.5{\cdot}10^7$	21
$\frac{1}{255}$	$2.9{\cdot}10^8$	$1.3{\cdot}10^8$	28	$1.9{\cdot}10^8$	21

- direktes Verfahren schneidet noch ganz gut ab
- Mehrgitterverfahren hier mit Jacobi. Verbesserung mit Gauß–Seidel–Glätter

Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierer

Im Prinzip kann jedes zusammengesetze iterative Verfahren gelesen werden als ein Schritt eines anderen Verfahren. Z.B.

$$\begin{aligned} x^{(k+1)} &= x^{(k)} + B_1(b - Ax^{(k)}) \\ x^{(k+2)} &= x^{(k+1)} + B_2(b - Ax^{(k+1)}) \end{aligned}$$

1. Schritt hat Iterationsmatrix $I - B_1A$, 2. Schritt $I - B_2A$. Für das zusammengesetzte Verfahren bekommt man

$$I - BA \equiv (I - B_2A)(I - B_1A) = I - [B_2 + B_1 - B_2AB_1]\,A$$

$$\Rightarrow x^{(k+2)} = x^{(k)} + [B_1 + B_2 - B_2AB_1]\,(b - Ax^{(k)})$$

Prinzip auf mehr als 2 Schritte übertragbar. Beispiele

- Symm. Gauß–Seidel. $A = D - E - E^\top$. $B_1 = (D - E^\top)^{-1}$, $B_2 = (D - E)^{-1}$. $\Rightarrow B = [B_1 + B_2 - B_2AB_1] = (D - E)^{-1}D(D - E^\top)^{-1}$
- ein Mehrgitterschritt auf feinstem Gitter inklusive rekursivem Aufruf

Mehrgitterverfahren als Vorkonditionierer

Mehrgitterapproximation als Vorkonditionierer für *cg*. Hierzu nötig:

- $\nu_1 = \nu_2$ (Genauso viel Nachglättung wie Vorglättung)
- bei Nachglättung $S_{h_s}^{\top}$ anstelle von S_{h_s}.

2D Randwertproblem cg mit Mehrgittervork.

h	V–Zykl.,$\nu_1 = \nu_2 = 1$				W–Zykl.,$\nu_1 = \nu_2 = 1$			
	ged. Jacobi		Gauß–Seidel		ged. Jacobi		Gauß–Seidel	
	Zeit (flops)	Anz. Iter.	Zeit (flops)	Anz. Iter.	Zeit (flops)	Anz. Iter.	Zeit (flops)	Anz. Iter.
$\frac{1}{31}$	$6.8{\cdot}10^5$	11	$6.6{\cdot}10^5$	9	$1.1{\cdot}10^6$	10	$9.7{\cdot}10^5$	8
$\frac{1}{63}$	$2.9{\cdot}10^6$	11	$2.8{\cdot}10^6$	9	$4.7{\cdot}10^6$	10	$4.3{\cdot}10^6$	8
$\frac{1}{127}$	$1.3{\cdot}10^7$	12	$1.2{\cdot}10^7$	9	$2.0{\cdot}10^7$	10	$1.8{\cdot}10^7$	8
$\frac{1}{255}$	$5.3{\cdot}10^7$	12	$4.7{\cdot}10^7$	9	$8.2{\cdot}10^7$	10	$7.5{\cdot}10^7$	8

Mehrgitterverfahren — Zusammenfassung

- $\oplus$ überlegene auf das Problem angepasstes Verfahren
- $\oplus$ Verfahren skaliert linear
- $\oplus$ Speicherbedarf moderat
- $\oplus$ Auf ähnliche Probleme übertragbar (Finite Elemente, Sattelpunktprobleme, Parabolische Aufgaben, ...)
- $\ominus$ Benötigt problembedingt eine vorher generierte Gitterhierarchie
- $\ominus$ Nicht mehr einsetzbar falls nur das feinste Gitter bekannt ist.
- $\ominus$ Für viele Problemklassen muss es individuell angepasst werden (robustere Glätter, andere Restriktion/Prolongation)

Versuch eines Ausweges in den letzten drei Fällen:

Algebraische Mehrgitterverfahren