Darstellende Geometrie
für Architekten und Bauingenieure

Skript und Präsenzübungen

WS 2010/11

Institut Computational Mathematics

Technische Universität Braunschweig

Inhaltsverzeichnis

1 Projektionsarten **3**
1.1 Zentralprojektion . . . 4
1.2 Parallelprojektion und Normalprojektion . . . 5
1.3 Kotierte Projektion . . . 6
1.4 Zugeordnete Normalrisse . . . 7
1.5 Axonometrie . . . 8

2 Zentralprojektion **9**
2.1 Bestimmungselemente . . . 9
2.2 Spurpunkte und Fluchtpunkte . . . 10

3 Zugeordnete Normalrisse **11**
3.1 Grundriss und Aufriss . . . 12
3.2 Kreuzriss . . . 13
3.3 Ordner . . . 13
3.4 Übung: Konstruktion des Kreuzrisses . . . 14
3.5 Übung: Konstruktion eines Zentralrisses (I) . . . 15
3.5.1 Bild eines Punktes . . . 18
3.5.2 Fluchtpunkte waagerechter Geraden . . . 19
3.6 Übung: Konstruktion eines Zentralrisses (II) . . . 22
3.6.1 Fluchtpunkte beliebiger Geraden . . . 23
3.7 Sichtbarkeit . . . 25

4 Grundelemente der Normalprojektion **26**
4.1 Darstellung von Punkten . . . 27
4.2 Darstellung von Geraden . . . 28
4.2.1 Hauptlinie erster Art oder Höhenlinie . . . 28
4.2.2 Hauptlinie zweiter Art oder Frontlinie . . . 29
4.2.3 Hauptlinie dritter Art . . . 29
4.2.4 Projizierende Geraden . . . 30
4.3 Übung: Konstruktion von Spurpunkten . . . 31
4.4 Darstellung von Ebenen . . . 31
4.4.1 Erstprojizierende (grundrissprojizierende) Ebene . . . 32
4.4.2 Zweitprojizierende (aufrissprojizierende) Ebene . . . 32
4.4.3 Doppeltprojizierende Ebene . . . 32
4.4.4 Höhen- oder Schichtebene . . . 33
4.4.5 Frontebene . . . 33
4.4.6 Pultebene . . . 33
4.4.7 Hauptlinien von Ebenen . . . 34
4.5 Übung: Konstruktion von Spurgeraden . . . 34
4.6 Lage zweier Geraden im Raum . . . 35
4.6.1 Zwei Geraden schneiden sich . . . 35

4.6.2 Zwei Geraden sind parallel . . . 35
4.6.3 Zwei Geraden sind windschief . . . 36
4.7 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (I) . . . 37
4.8 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (II) . . . 38
4.9 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (III) . . . 39
4.10 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (IV) . . . 40
4.11 Sichtbarkeit . . . 41
4.12 Übung: Konstruktion von Lagen (I) . . . 42
4.13 Übung: Konstruktion von Lagen (II) . . . 43
4.14 Neigungswinkel . . . 45
4.14.1 Geraden . . . 45
4.14.2 Ebenen und Fallgeraden . . . 45

5 Platonische Körper 46
5.1 Übung: Schnittfigur . . . 48
5.1.1 Spurgeraden einer Ebene . . . 49
5.1.2 Schnittpunkt mit einer Geraden . . . 50

6 Seitenrisse 53
6.1 Die Seitenrissebene . . . 54
6.2 Übung: Konstruktion eines Seitenrisses . . . 55
6.3 Doppelter Seitenriss . . . 57
6.4 Übung: Konstruktion eines doppelten Seitenrisses . . . 58
6.5 Übung: Projizierendmachen von Geraden . . . 60
6.6 Übung: Drehen eines Punktes um eine Achse . . . 61
6.7 Übung: Konstruktion einer Gerade . . . 62
6.8 Übung: Projizierendmachen von Ebenen . . . 63
6.9 Übung: Neigungswinkel einer Ebene . . . 64
6.10 Übung: Entzerren durch Umprojizieren (I) . . . 65
6.11 Übung: Entzerren durch Umprojizieren (II) . . . 67

7 Kotierte Projektion 70
7.1 Die kotierte Projektion . . . 70
7.2 Übung: Konstruktion eines Seitenrisses . . . 71
7.3 Geraden . . . 73
7.4 Übung: Konstruktion einer Graduierung . . . 74
7.5 Ebenen . . . 75
7.6 Übung: Konstruktion von Ebenen . . . 76
7.7 Übung: Konstruktion von Schnittgeraden . . . 78
7.8 Übung: Konstruktion von Schnittpunkten . . . 79
7.9 Erste Grundaufgabe . . . 80
7.10 Übung: Straße abböschen . . . 82
7.11 Zweite Grundaufgabe . . . 84
7.12 Übung: Konstruktion einer Serpentine . . . 85
7.13 Dritte Grundaufgabe . . . 86
7.14 Übung: Teich anlegen . . . 87

8 Bezeichnungen 89

9 Literatur 90

Kapitel 1

Projektionsarten

Wie sehen wir 3-dimensionale Objekte und wie können wir sie (2-dimensional) so zeichnen, dass sie möglichst gut erkennbar sind?

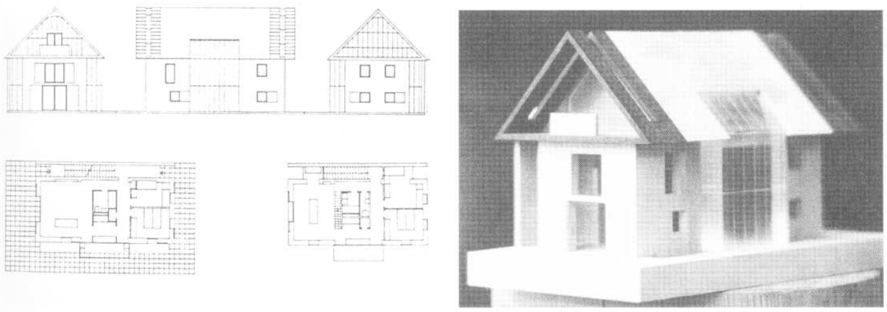


Bild 1.1: Zeichnung und Modell als Kommunikationsmittel in der Bauplanung - Wohnhaus für zwei Familien, Essen-Schönebeck, 1985, Burkhard Grashorn

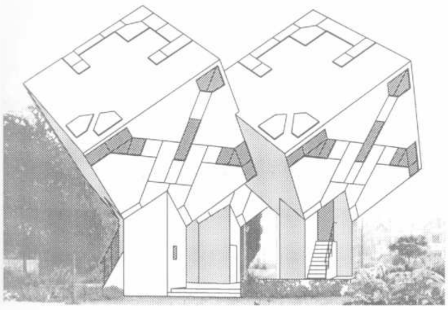
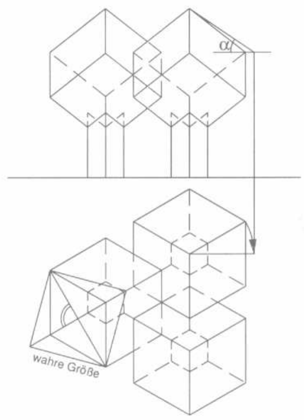


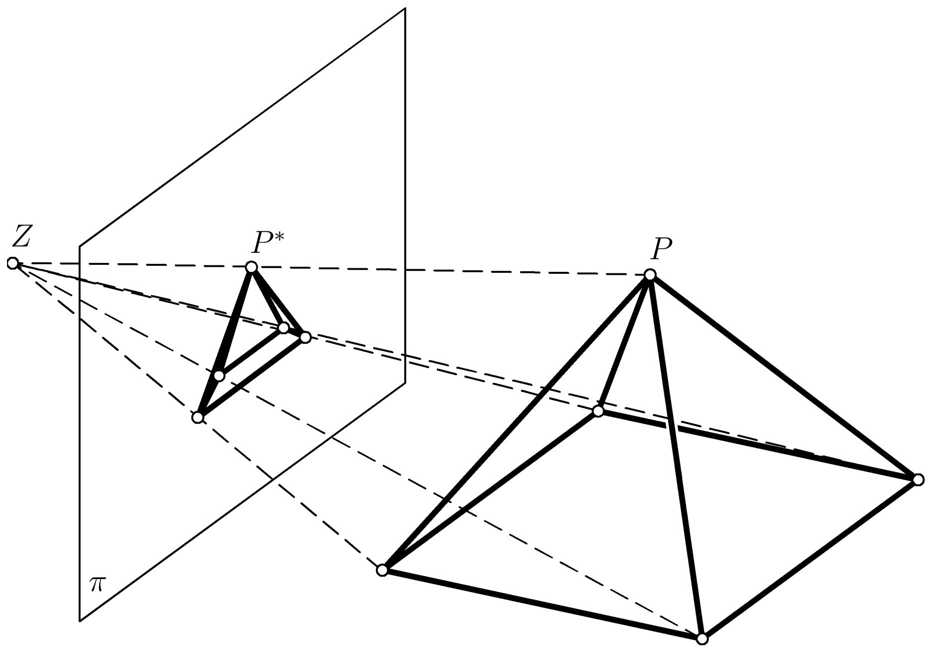
Bild 1.5: Perspektive (Fotomontage) - Baumhäuser, Helmond, Niederlande, 1976, Piet Blom

Bild 1.6: Grund- und Aufriß der Baumhäuser



1.1 Zentralprojektion

Die **Zentralprojektion** ist dem natürlichen Sehvorgang nachgebildet. Ein Bildpunkt P^* ergibt sich als Schnittpunkt der Bildebene π mit dem Projektionsstrahl durch den Augpunkt Z und den Dingpunkt P. Der Bildpunkt P^* heißt auch **Riss** von P.



Die Abbildung heißt **Zentralprojektion**, das entstehende Bild heißt **Zentralriss**.

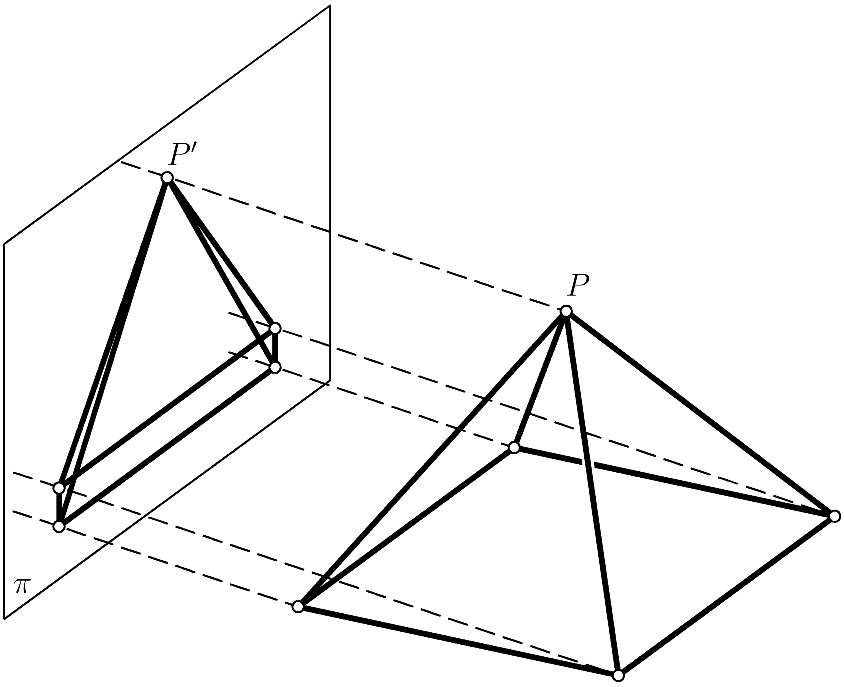
Bei der Zentralprojektion werden Geraden im Raum auf Geraden im Bild abgebildet: Die Abbildung ist **geradentreu**.

Die Zentralprojektion liefert eine Abbildung von einem Objekt, welches für uns relativ anschaulich ist. Allerdings ist es oft schwierig, die wahren Größenverhältnisse des Objektes aus einer Zentralprojektion abzulesen.

Ein Beispiel für einen Zentralriss ist der Schatten eines Gegenstandes bei künstlicher Beleuchtung mit einer nahezu punktförmigen Lichtquelle; Die Lichtquelle ist dabei der Augpunkt. Ein weiteres Beispiel ist die Fotographie eines Objektes; Der Augpunkt ist dabei die Linse der Kamera.

1.2 Parallelprojektion und Normalprojektion

Bei der **Parallelprojektion** ergibt sich der Bildpunkt P' als Schnittpunkt der Bildebene π mit dem Projektionsstrahl durch den Dingpunkt P. Alle Projektionsstrahlen sind parallel. Die Richtung der Projektionsstrahlen bestimmt das entstehende Bild. Der Bildpunkt P' wird wieder auch **Riss** von P genannt.



Die Abbildung heißt **Parallelprojektion**, das entstandene Bild **Parallelriss**.

Wieder werden Geraden im Raum auf Geraden im Bild abgebildet: Auch diese Abbildung ist **geradentreu**.

Die Parallelprojektion entspricht nicht dem Sehvorgang und liefert Bilder, die für uns nicht immer sehr anschaulich sind. Aber die Parallelprojektion hat den Vorteil, dass die Größenverhältnisse des Objektes einfacher aus dem Bild abzulesen sind als bei der Zentralprojektion, denn das Bild wird nicht verzerrt.

Bei der **schiefen Parallelprojektion** treffen die Projektionsstrahlen schief auf die Bildebene. Bei der **Normalprojektion** treffen die Projektionsstrahlen senkrecht auf die Bildebene. Das entstandene Bild heißt dann auch **Normalriss**. Aus einem Normalriss lassen sich am leichtesten die wahren Größen von Strecken und Winkeln des Originals ermitteln. Der Normalriss ist daher zur Herstellung von technischen Zeichnungen am besten geeignet.

1.3 Kotierte Projektion

Die **kotierte Projektion** ist eine Variante der Normalprojektion: Es wird ein Objekt auf eine horizontale Bildebene projiziert und dann wird zusätzlich an jeden Bildpunkt die Entfernung des Originalpunktes von der Bildebene als **Kote** geschrieben (Französisch 'a cote de' = 'neben'). Dabei muss für die Höhe ein Maßstab angegeben werden.

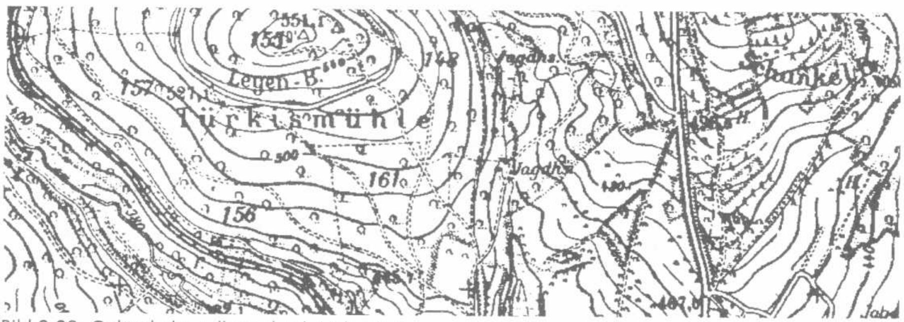
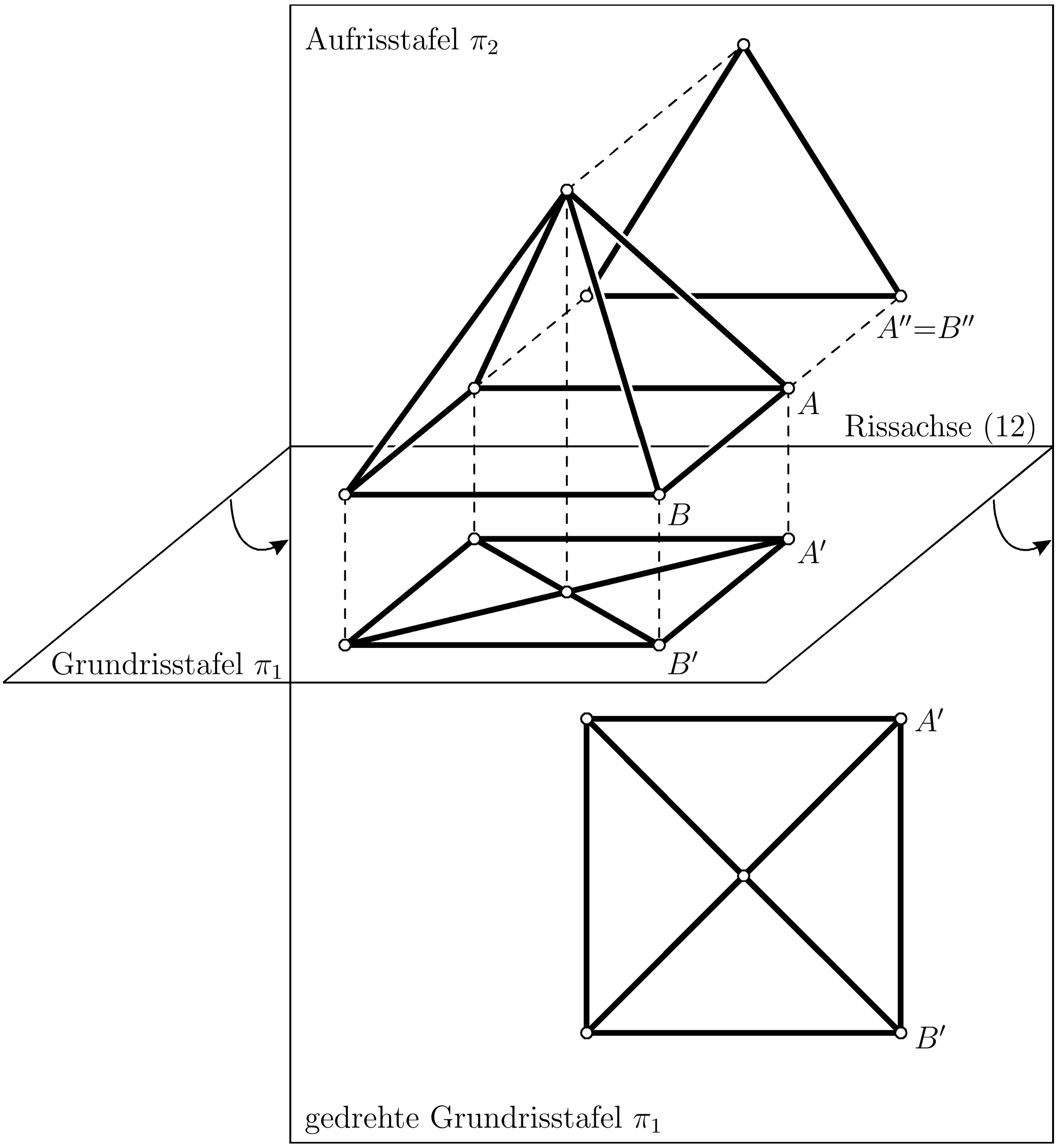


Bild 2.23: Geländedarstellung durch Höhenlinien

Die kotierte Projektion wird vorwiegend für Geländedarstellungen verwendet. Ein zweiter Anwendungsbereich sind Dachausmittlungen.

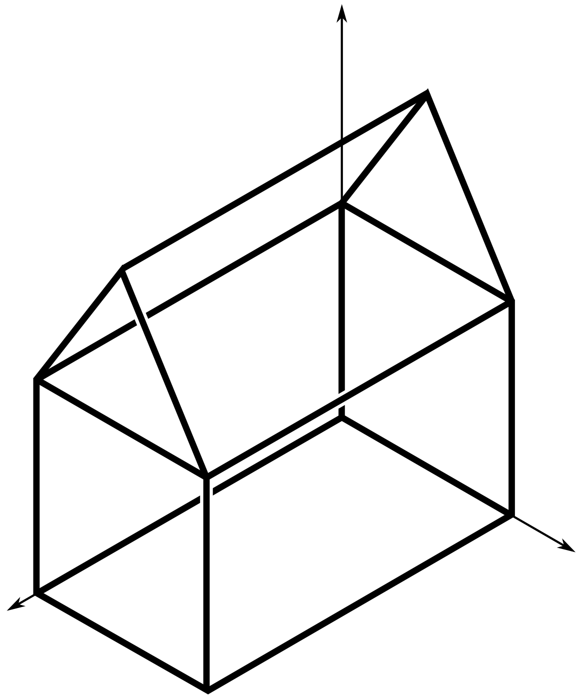
1.4 Zugeordnete Normalrisse

Das Objekt wird auf zwei zueinander senkrecht stehende Bildebenen, genannt Grund- und Aufrissebene, senkrecht projiziert. Klappt man nun die Rissebenen um eine Rissachse in die Zeichenebene, so spricht man von **zugeordneten Normalrissen**. Das Objekt ist durch zwei seiner Normalrisse eindeutig bestimmt.



1.5 Axonometrie

Mithilfe der **Axonometrie** kann man eher anschauliche Bilder erstellen. Es wird das Objekt mit einem dreidimensionalen Koordinatensystem auf die Bildebene projiziert.



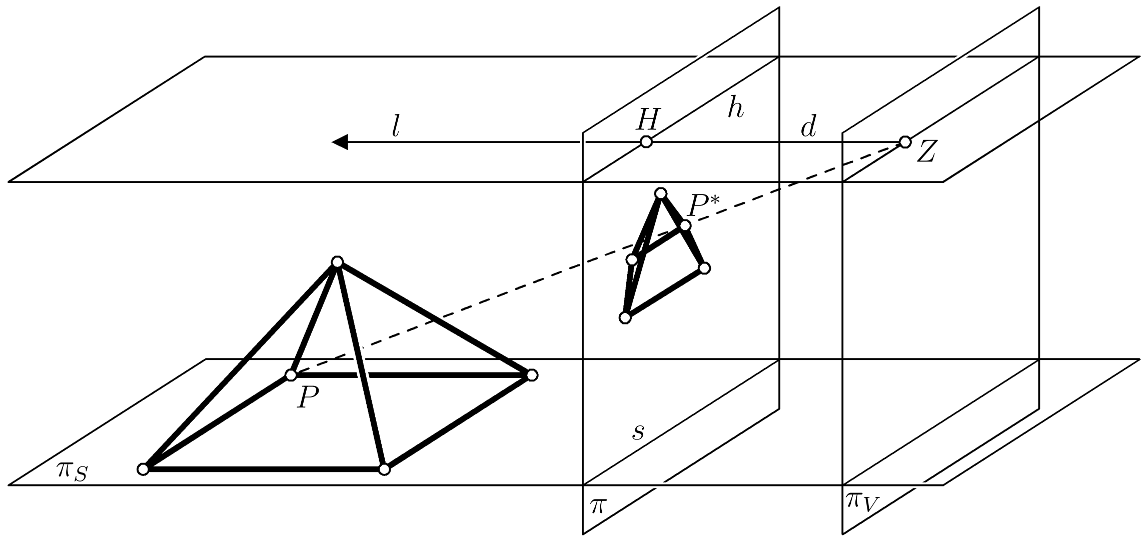
Kapitel 2

Zentralprojektion

Hier werden einige Eigenschaften und bestimmende Elemente der Zentralprojektion vorgestellt.

2.1 Bestimmungselemente

Das folgende Bild enthält die wesentlichen Elemente einer Zentralprojektion.



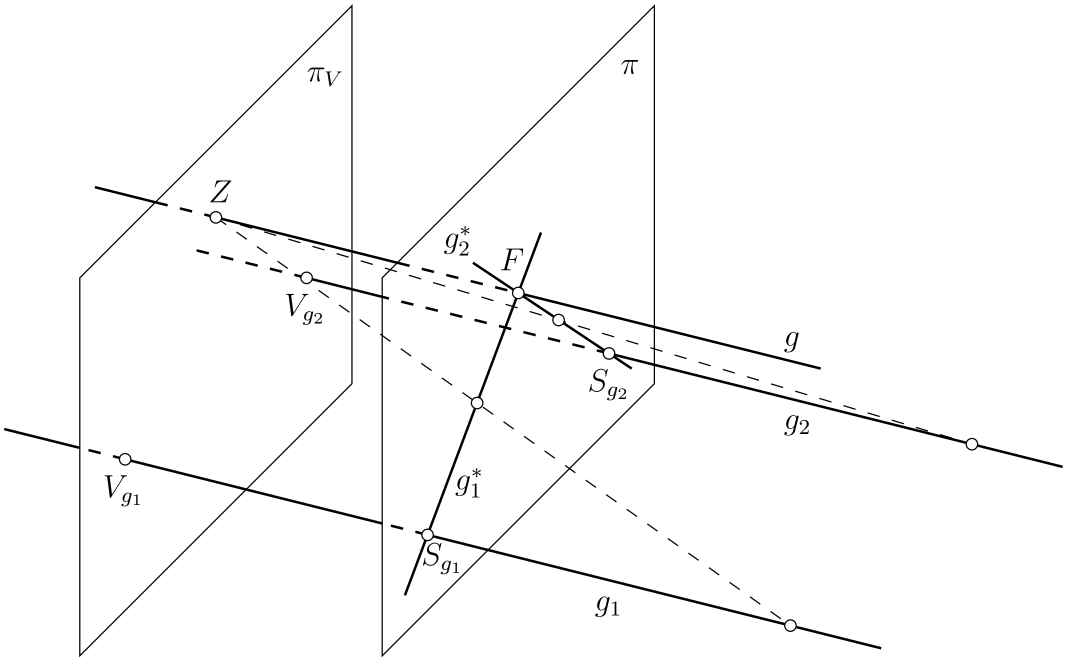
Z	Projektionszentrum oder Auge der Zentralprojektion
l	Hauptsehstrahl
π	Bildebene
π_V	Verschwindungsebene
π_S	Standebene
H	Hauptpunkt der Perspektive
d	Distanz des Auges von der Bildebene
h	Horizont
s	Standlinie

Bei einer Zentralprojektion kann jedem Punkt, der nicht auf der Verschwindungsebene liegt, ein Bild zugeordnet werden.

Verschiedene Punkte im Objekt können das gleiche Bild haben. Sie sind dann im Bild nicht mehr zu unterscheiden.

2.2 Spurpunkte und Fluchtpunkte

Sei g_1 eine Gerade, die nicht parallel zur Bildebene π verläuft. Dann hat g_1 einen **Spurpunkt** S_{g_1}: Dies ist der Punkt, in dem sich g_1 mit der Bildebene π schneidet. Der **Verschwindungspunkt** von g_1 ist der Punkt, in dem sich g_1 mit der Verschwindungsebene π_V schneidet.
Weiter gibt es eine Gerade g, die parallel zu g_1 verläuft und durch den Augpunkt Z geht. Der **Fluchtpunkt** F_{g_1} von g_1 ist der Punkt, in dem g die Bildebene π schneidet.
Ist g_2 eine Gerade, die parallel zu g_1 verläuft, so haben g_1 und g_2 den gleichen Fluchtpunkt. Es gilt also $F_{g_1} = F_{g_2}$. Das wird in dem folgenden Bild demonstriert.



S_{g_1}, S_{g_2}	Spurpunkte der Geraden g_1 und g_2
V_{g_1}, V_{g_2}	Verschwindungspunkte der Geraden g_1 und g_2
g_1^*, g_2^*	Bilder der Geraden g_1 und g_2
g	Gerade durch Z parallel zu g_1 und g_2
$F = F_{g_1} = F_{g_2}$	Fluchtpunkt der Geraden g_1 und g_2

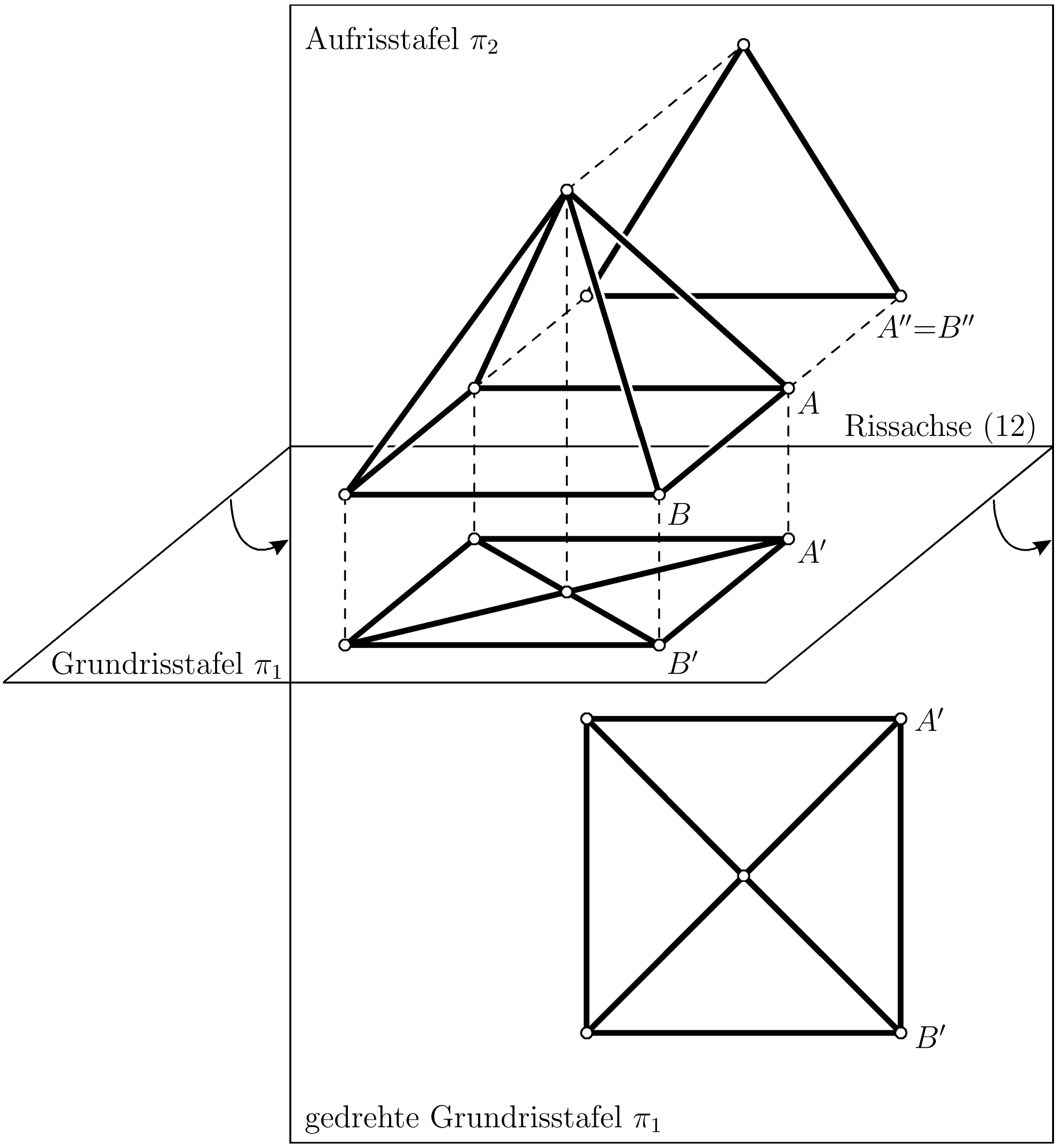
Man kann an dem Bild auch erkennen, dass die Bilder paralleler Geraden nicht parallel sind. Die beiden Bilder schneiden sich im gemeinsamen Fluchtpunkt. Man kann auch erkennen, dass das Bild jeder Gerade durch den Spurpunkt und den Fluchtpunkt verläuft.

Kapitel 3

Zugeordnete Normalrisse

In technischen Zeichnungen wird normalerweise die Normalprojektion verwendet. Dabei wird das Objekt wird auf zwei zueinander sekrecht stehenden Bildebenen senkrecht projiziert. Die beiden Bildebenen heißen **Grundriss** und **Aufriss**. Zusammen sind es die **zugeordneten Normalrisse**.

3.1 Grundriss und Aufriss

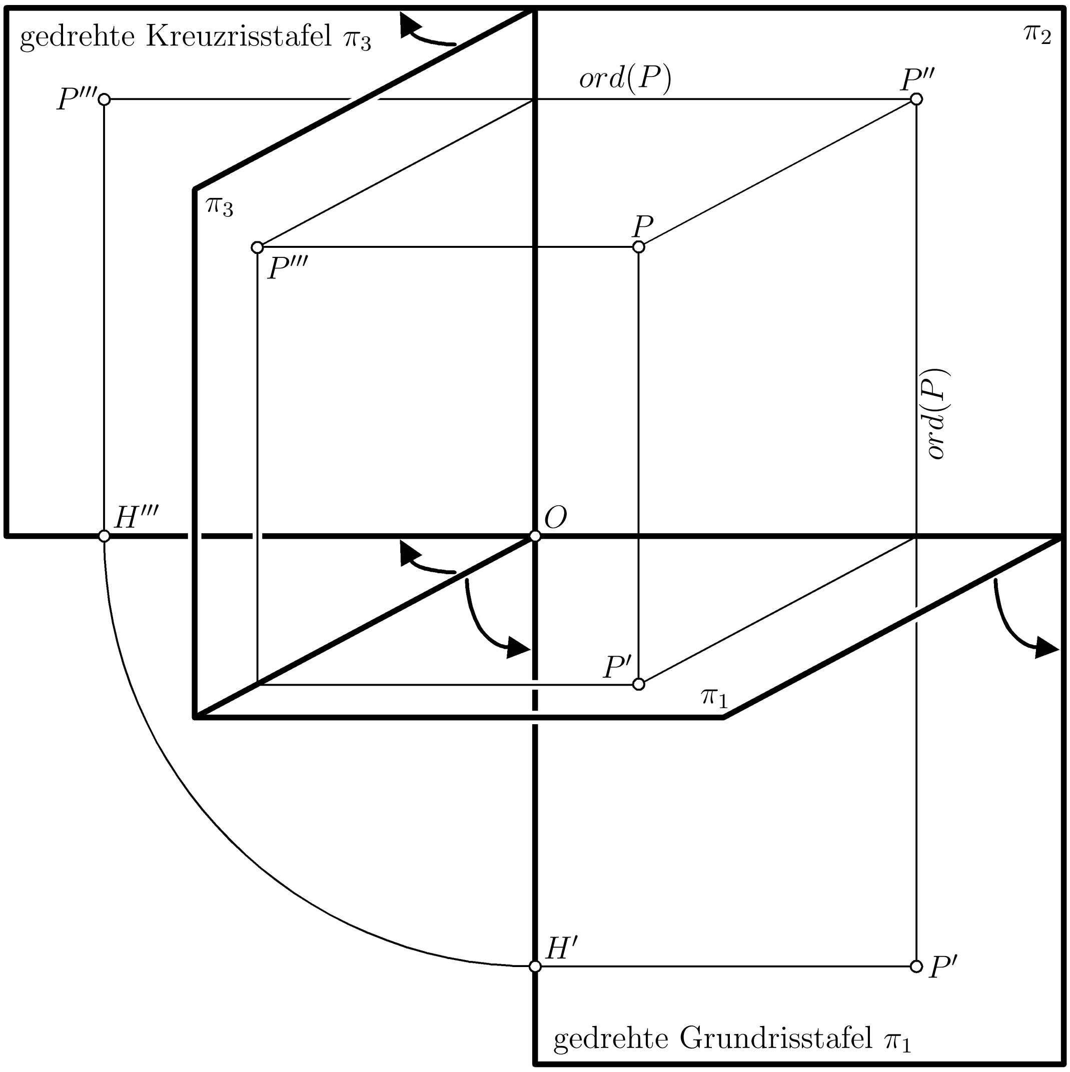


Zu einem Punkt A ist A' sein Grundriss und A'' sein Aufriss. Diese Bezeichnungsweise muss immer beibehalten werden!

Der Grundriss wird dann aus seiner natürlichen horizontalen Lage nach unten gedreht, so dass er mit dem Aufriss in einer Ebene liegt. Das wird auch **Verebnung** genannt.

3.2 Kreuzriss

Manchmal gibt es noch eine dritte Bildebene, die senkrecht zu Grund- und Aufriss steht: den **Kreuzriss**. Diese wird dann in der Verebnung nach links gedreht, so dass auch diese Tafel mit Grund- und Aufriss in einer Ebene liegt. Der Kreuzriss eines Punktes P wird mit P''' bezeichnet.



π_1, π_2, π_3	Grund-, Auf- und Kreuzrissebene ($\pi_1 \perp \pi_2 \perp \pi_3 \perp \pi_1$)
P	Dingpunkt
P', P'', P'''	Grund-, Auf- und Kreuzriss von P

Die Rissachsen heißen: (12) für $\pi_1 \cap \pi_2$, (13) für $\pi_1 \cap \pi_3$, und (23) für $\pi_2 \cap \pi_3$.

3.3 Ordner

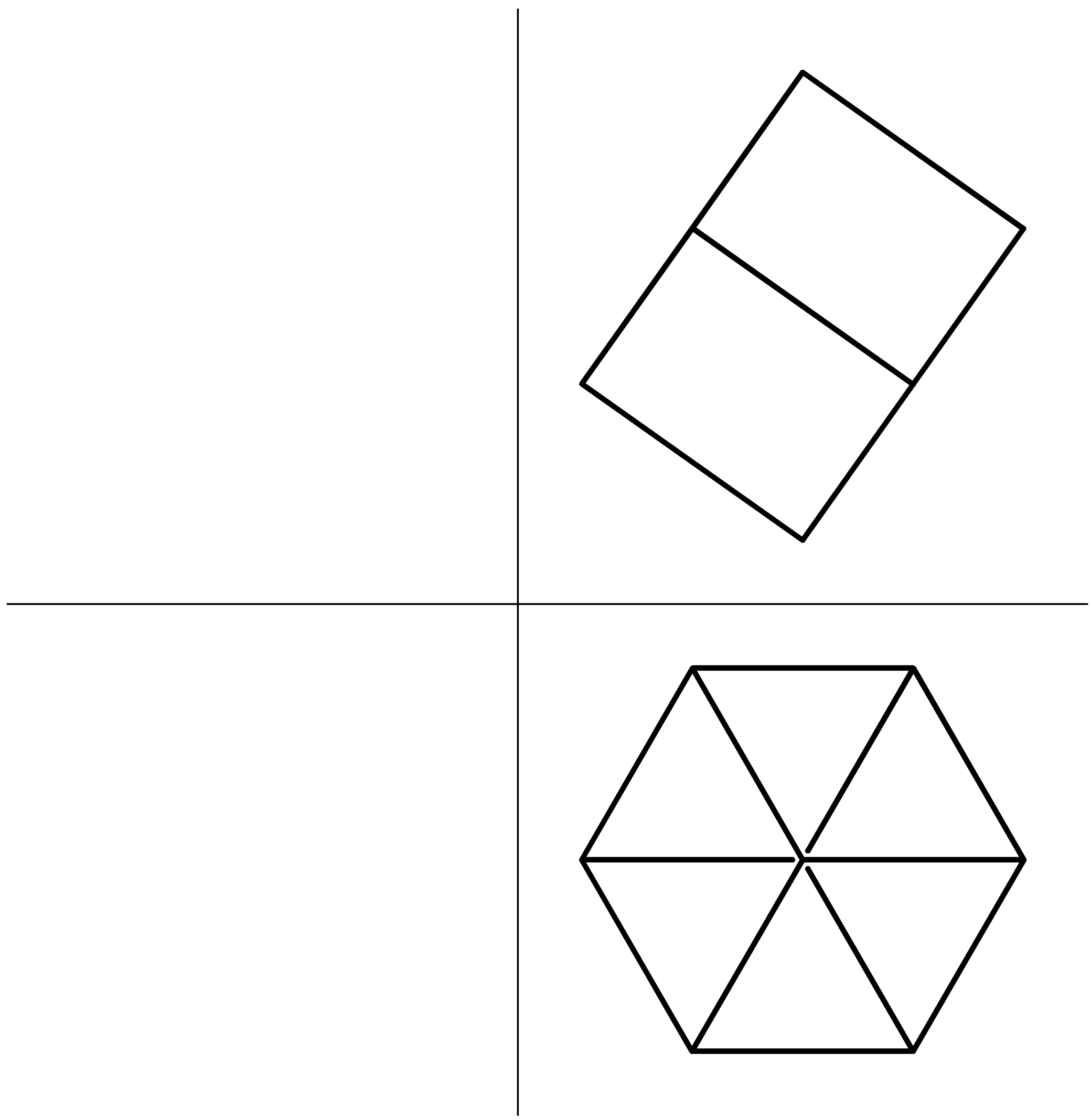
Zwei zugeordnete Normalrisse eines Punktes P liegen immer auf einer Geraden senkrecht zur Rissachse. Diese Gerade heißt auch **Ordner** von P und wird mit $ord(P)$ bezeichnet.

Ordner sind ein wichtiges Hilfsmittel in Konstruktionen. So ist zum Beispiel der Kreuzriss P''' aus Grund- und Aufriss P' und P'' konstruierbar, denn P''' liegt auf einem Ordner mit P'' und es gilt $\overline{OH'} = \overline{OH'''}$.

3.4 Übung: Konstruktion des Kreuzrisses

Ein Objekt ist gegeben in Grund- und Aufriss. Wir wollen dazu den Kreuzriss konstruieren.

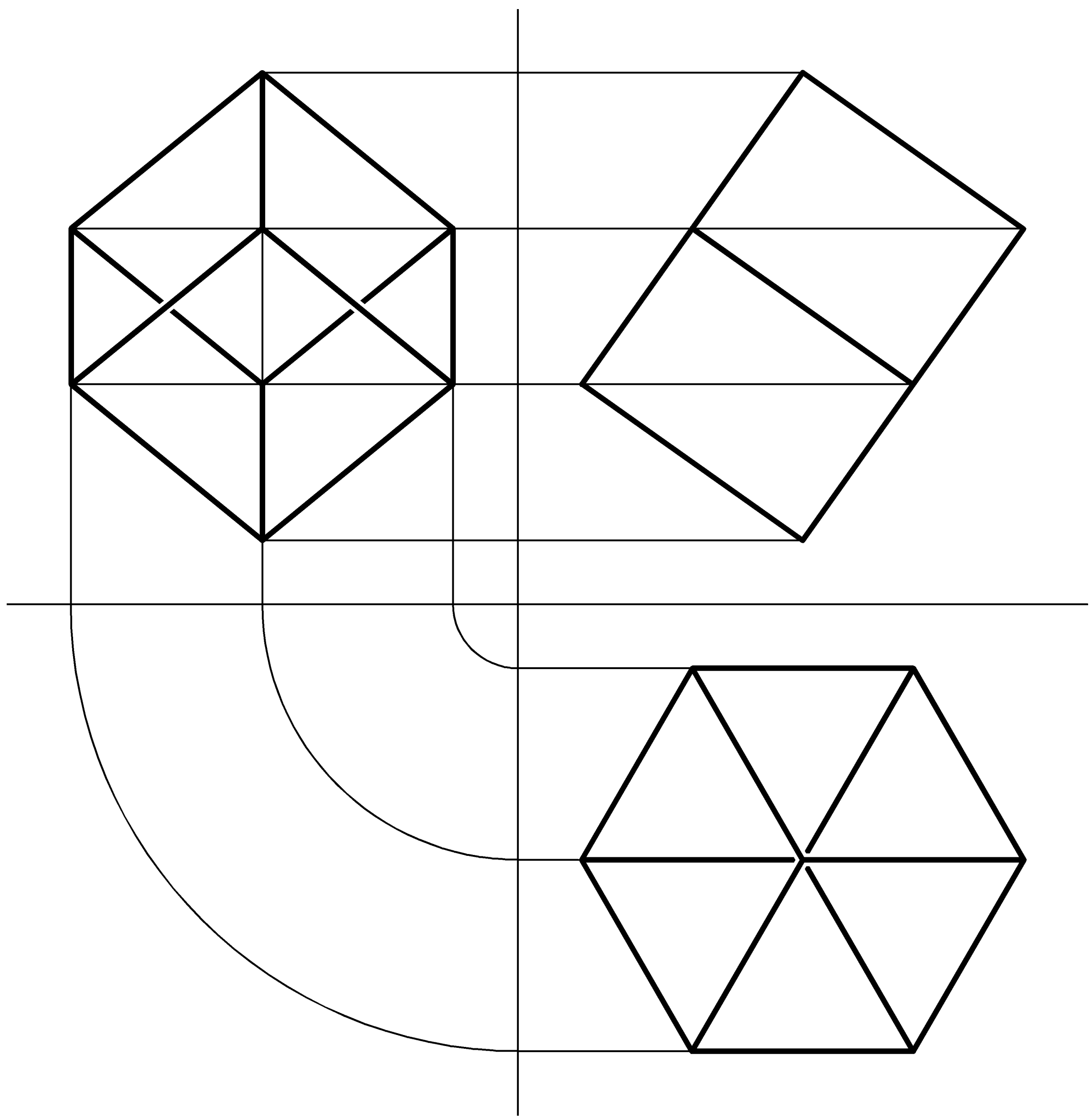
Aufgabe



Konstruktion

Übertrage Punkte einzeln mit Hilfe ihrer Ordner.

Lösung



3.5 Übung: Konstruktion eines Zentralrisses (I)

Gegeben seien der Grundriss und der Aufriss eines Objektes. Wir wollen eine anschauliche Darstellung des Objektes konstruieren. Wie kann man das machen?

Eine Möglichkeit dazu ist die Konstruktion einer Zentralprojektion des Objektes, denn die Zentralprojektion ist in der Regel anschaulicher als die Darstellung in den zugeordneten Normalrissen.

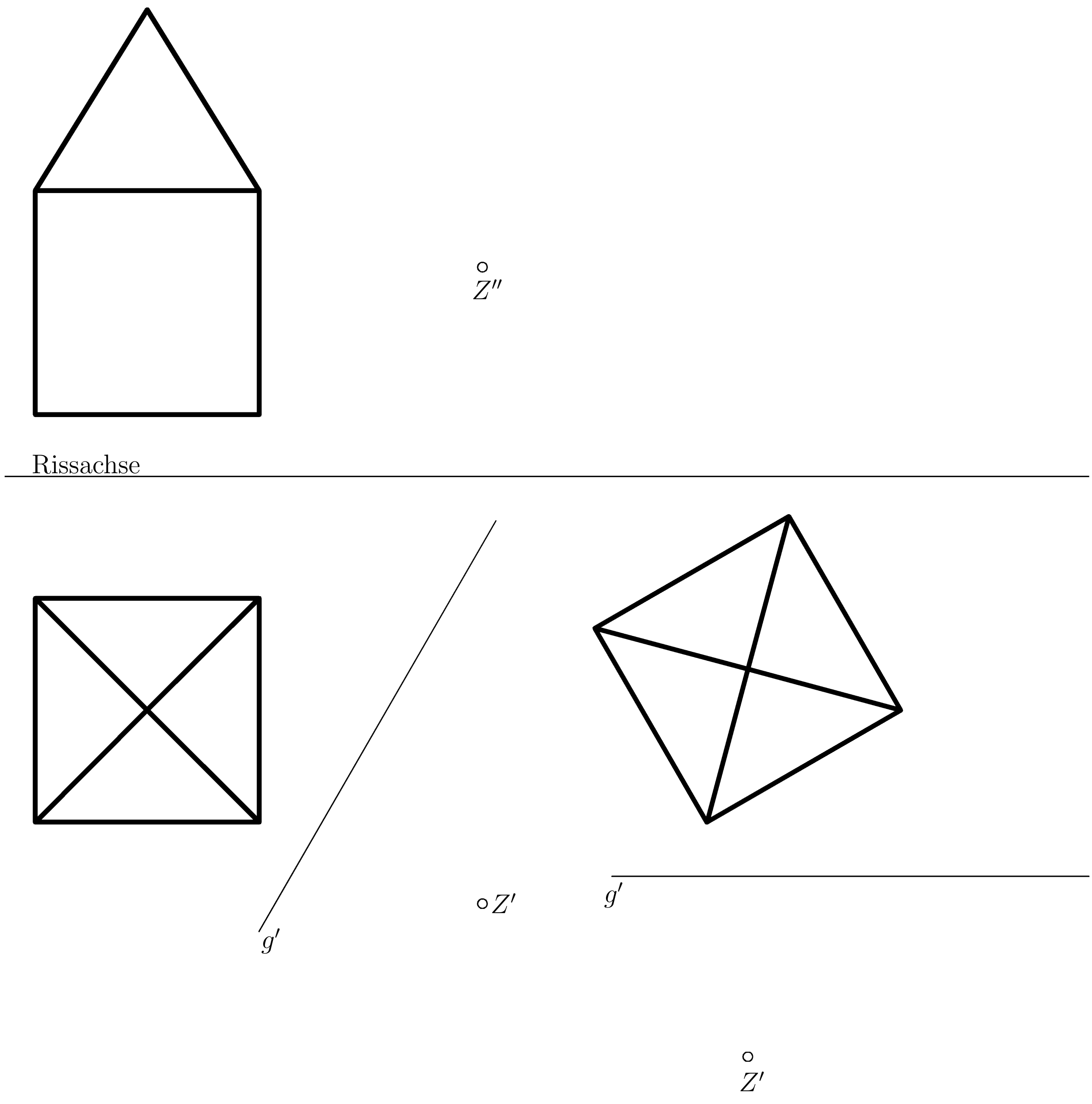
Um eine Zentralprojektion konstruieren zu können, brauchen wir die Angabe des Augpunktes und der Bildebene der Zentralprojektion. Diese sollen mit in Grund- und Aufriss eingetragen sein:

- Z' und Z'' seien Grund- und Aufriss des Augpunktes Z.
- g' sei die Schnittgerade der Zentralriss-Bildebene mit der Grundrissebene.
- Die Zentralrissebene soll senkrecht auf der Grundrissebene stehen.

Wir gehen die Aufgabe nun so an, dass wir den gegebenen Grund- und Aufriss auf die linke Seite eines Papiers zeichnen, auf der rechten Seite soll der Zentralriss entstehen.

Der erste Schritt in der Kontruktion des Zentralrisses ist eine Drehung des Grundrisses, so dass g' und die Rissachse parallel liegen. Der gedrehte Grundriss ist Teil der neuen Konstruktion und wird auf die rechte Seite gezeichnet.

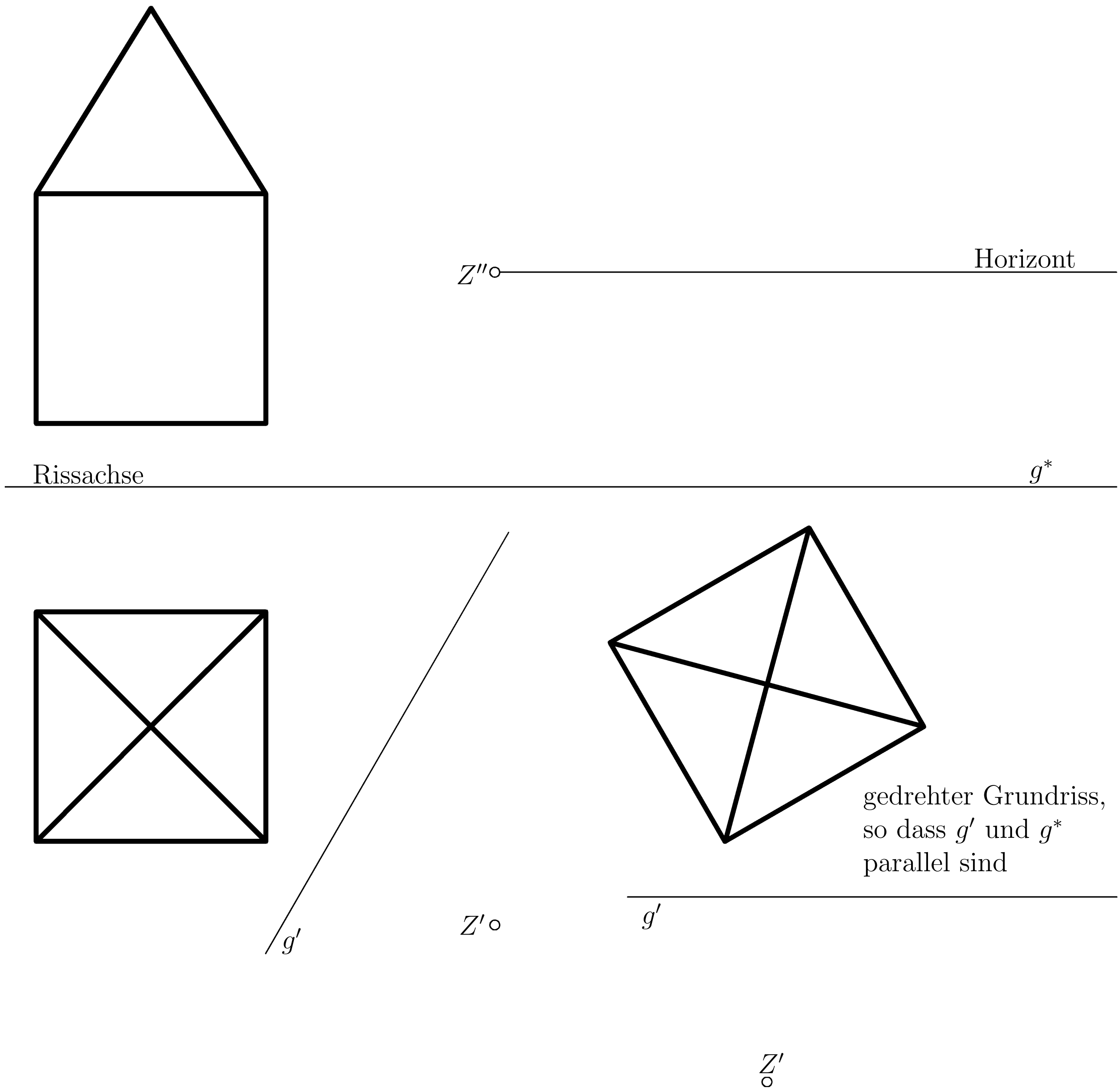
Vorlage



Vorbereitungen

Linker Teil: Grund- und Aufriss

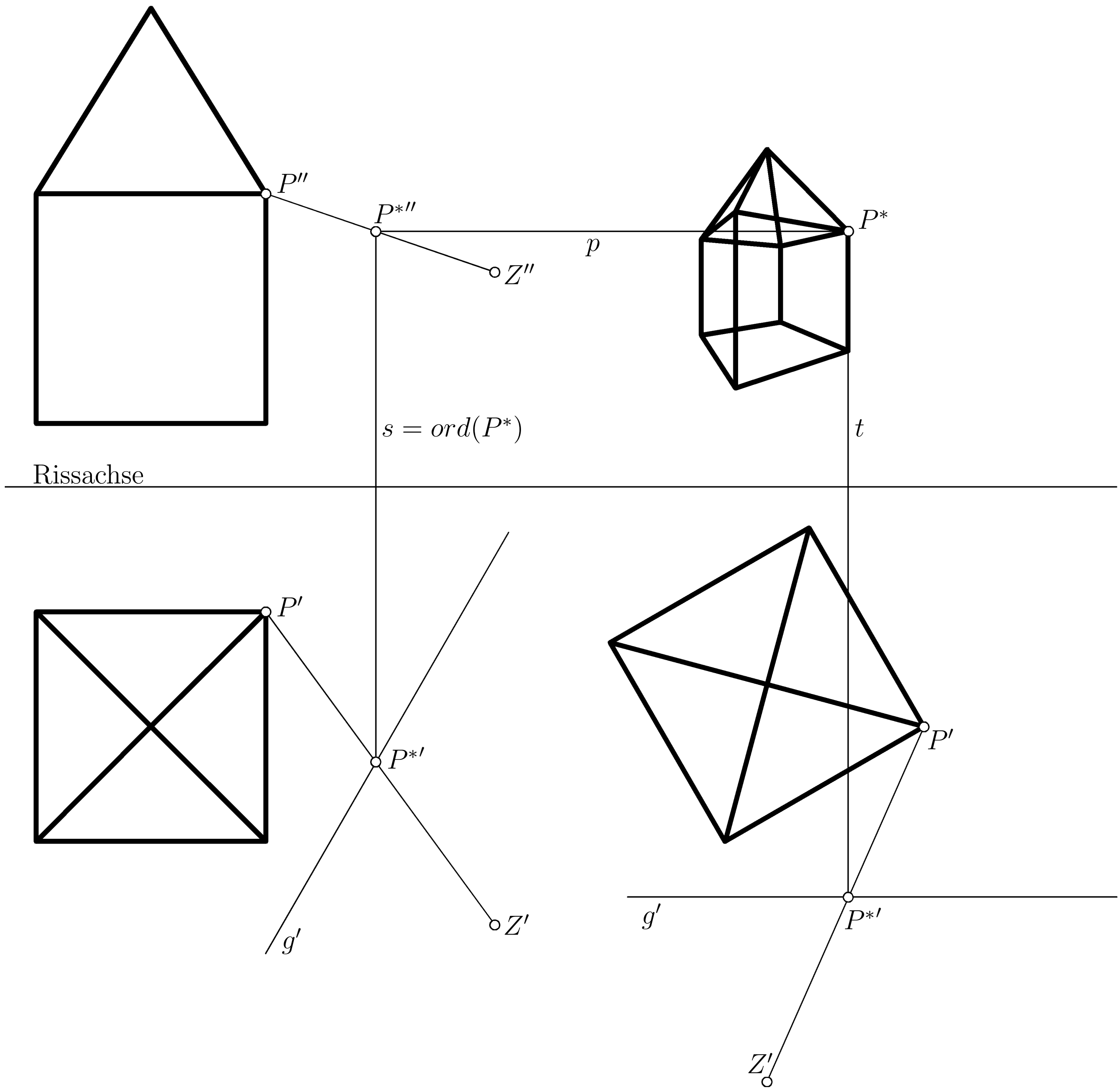
Rechter Teil: Zentralriss



Z''	Aufriss des Augpunktes
Z'	Grundriss des Augpunktes
g'	Schnittgerade der Zentralrissebene mit der Grundrissebene
g^*	Verlängerung der Rissachse
Horizont	Parallele zur Rissachse durch Z''

3.5.1 Bild eines Punktes

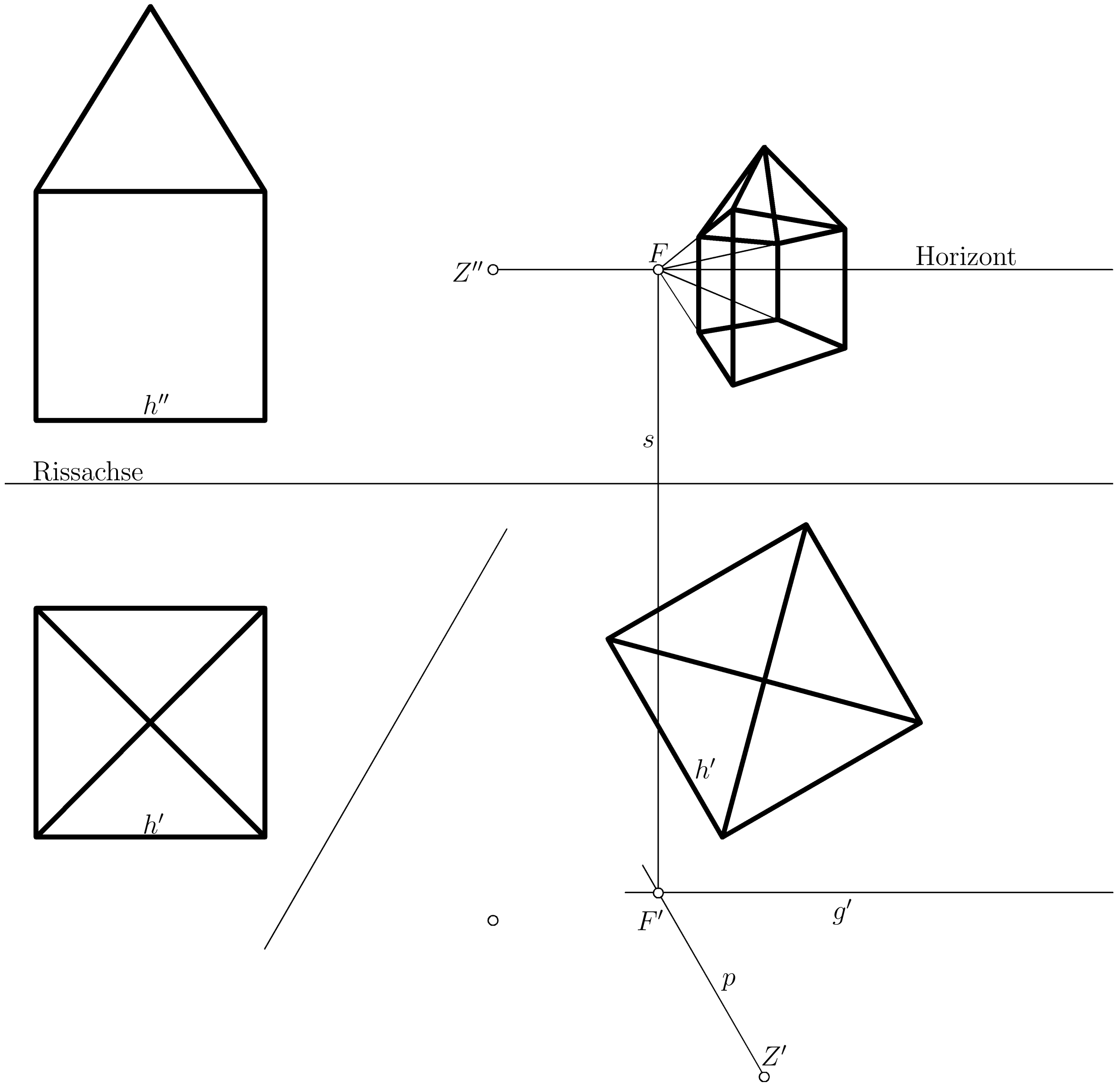
Gegeben: Punkt P in Grundriss P' und Aufriss P''
Gesucht: Zentralriss P^* des Punktes P



$P^{*\prime}$	Schnittpunkt von g' und $P'Z'$
s, t	Senkrechte zur Rissachse durch $P^{*\prime}$
$P^{*\prime\prime}$	Schnittpunkt von $P''Z''$ und s
p	Parallele zur Rissachse durch $P^{*\prime\prime}$
P^*	Schnittpunkt von p und t

3.5.2 Fluchtpunkte waagerechter Geraden

Gegeben: Gerade h, die parallel zur Grundrissebene ist.
(Der Aufriss h'' ist also parallel zur Rissachse)
Gesucht: Fluchtpunkt F von h (und aller zu h parallelen Geraden).



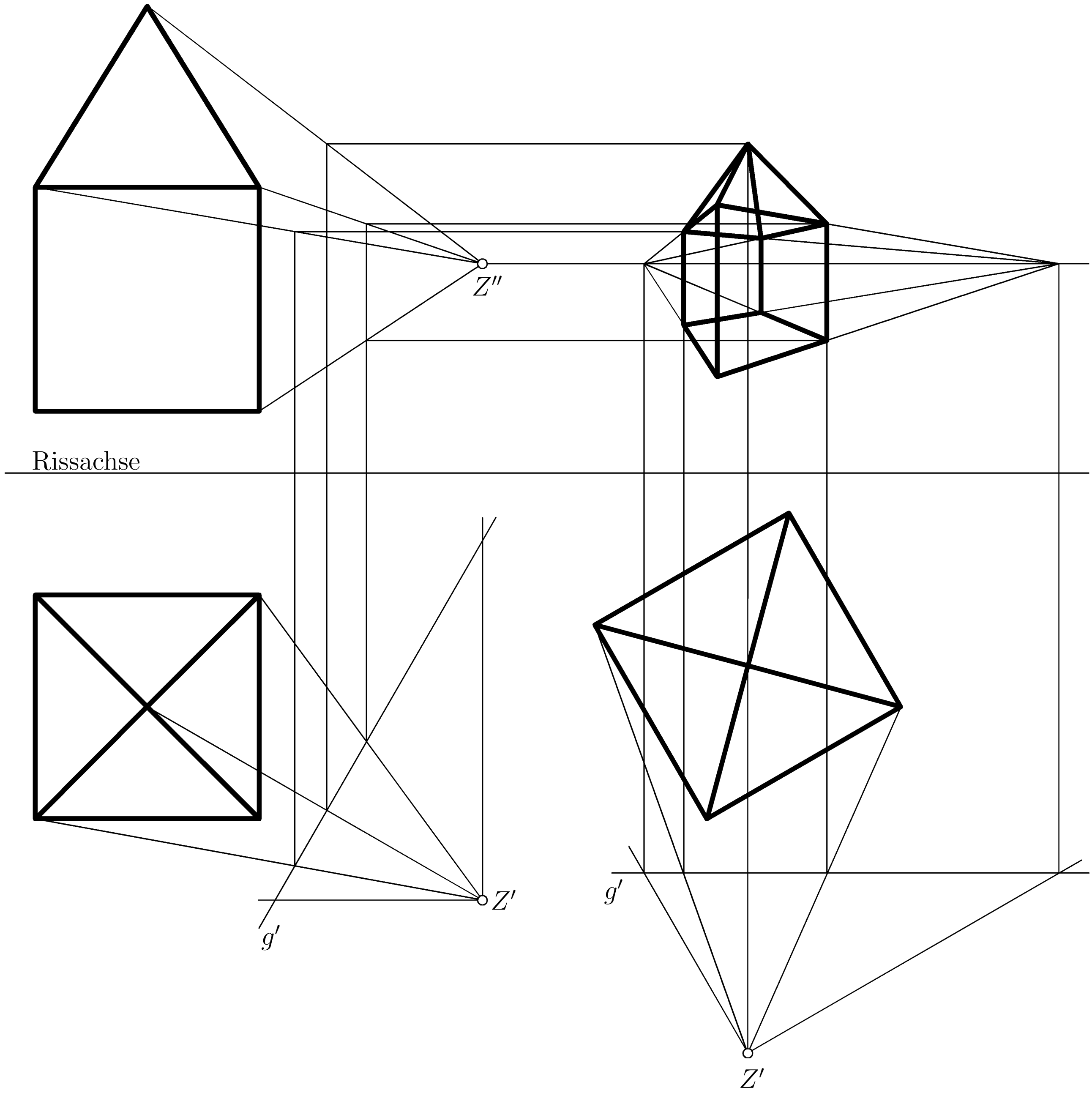
p	Parallele zu h' durch Z'
F'	Schnittpunkt von g' und p
s	Senkrechte zur Rissachse durch F'
F	Schnittpunkt des Horizonts mit s

Konstruktion

Mit Hilfe der Konstruktion von Fluchtpunkten von Geraden und Bildern von Punkten kann man nun den gesamten Zentralriss schnell herleiten. Schritte:

- Konstruiere die Fluchtpunkte der waagerechten Geraden; Da parallele Geraden den gleichen Fluchtpunkt haben, gibt es zwei Fluchtpunkte in dieser Konstruktion. (F_1 und F_2).
- Wähle 3 Eckpunkte des Quaders, die nicht auf einer Fläche liegen, und konstruiere ihre Bilder. (A^*, B^*, C^*).
- Konstruiere das Bild der Dachspitze (D^*).
- Nun können alle anderen Eckpunkte und alle Verbindungsgeraden abgeleitet werden als Schnittpunkte.
- Dabei ist zu beachten, dass Geraden, die senkrecht auf dem Grundriss stehen, auch senkrechte (und damit parallele) Bilder im Zentralriss haben.

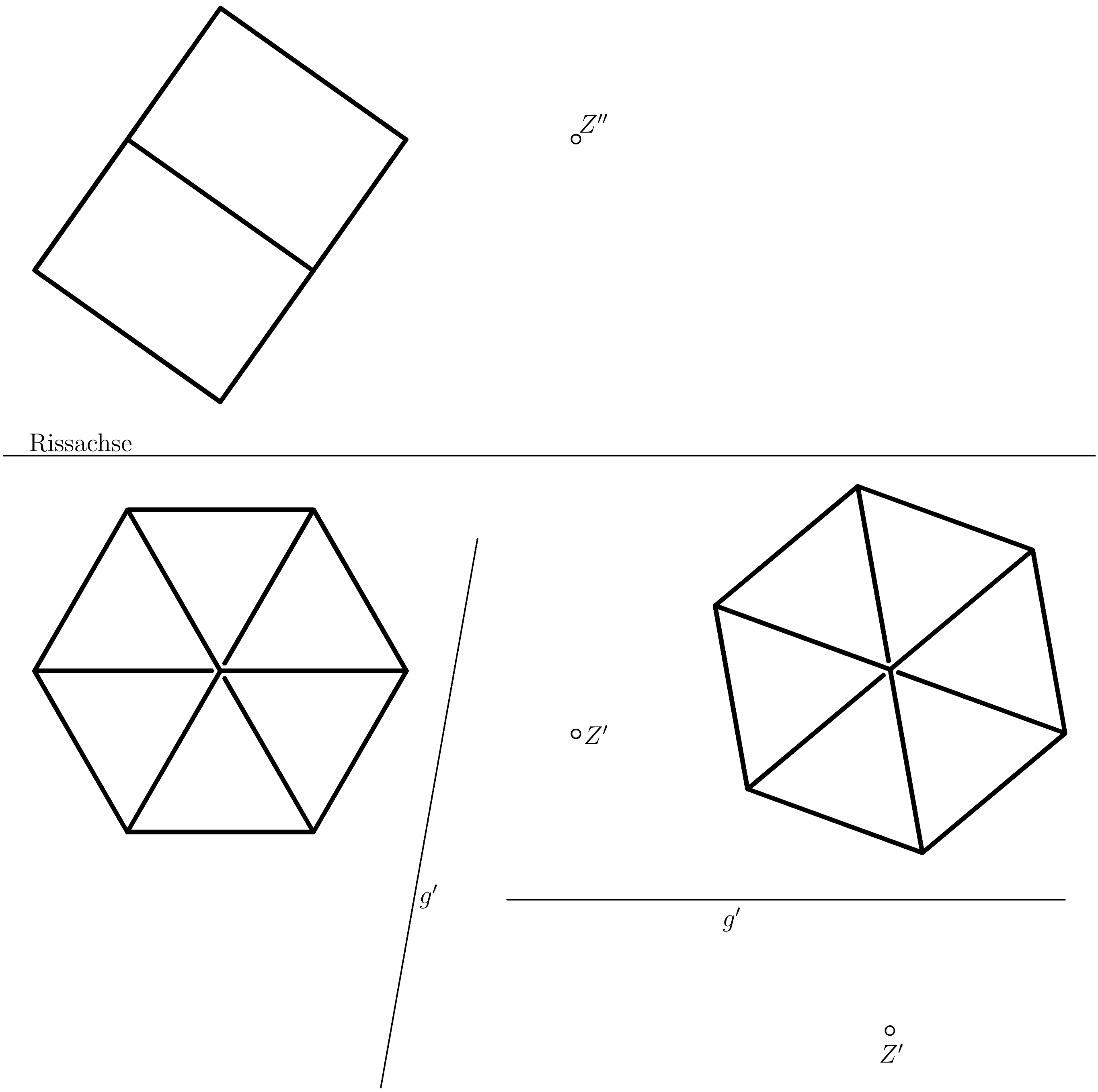
Lösung



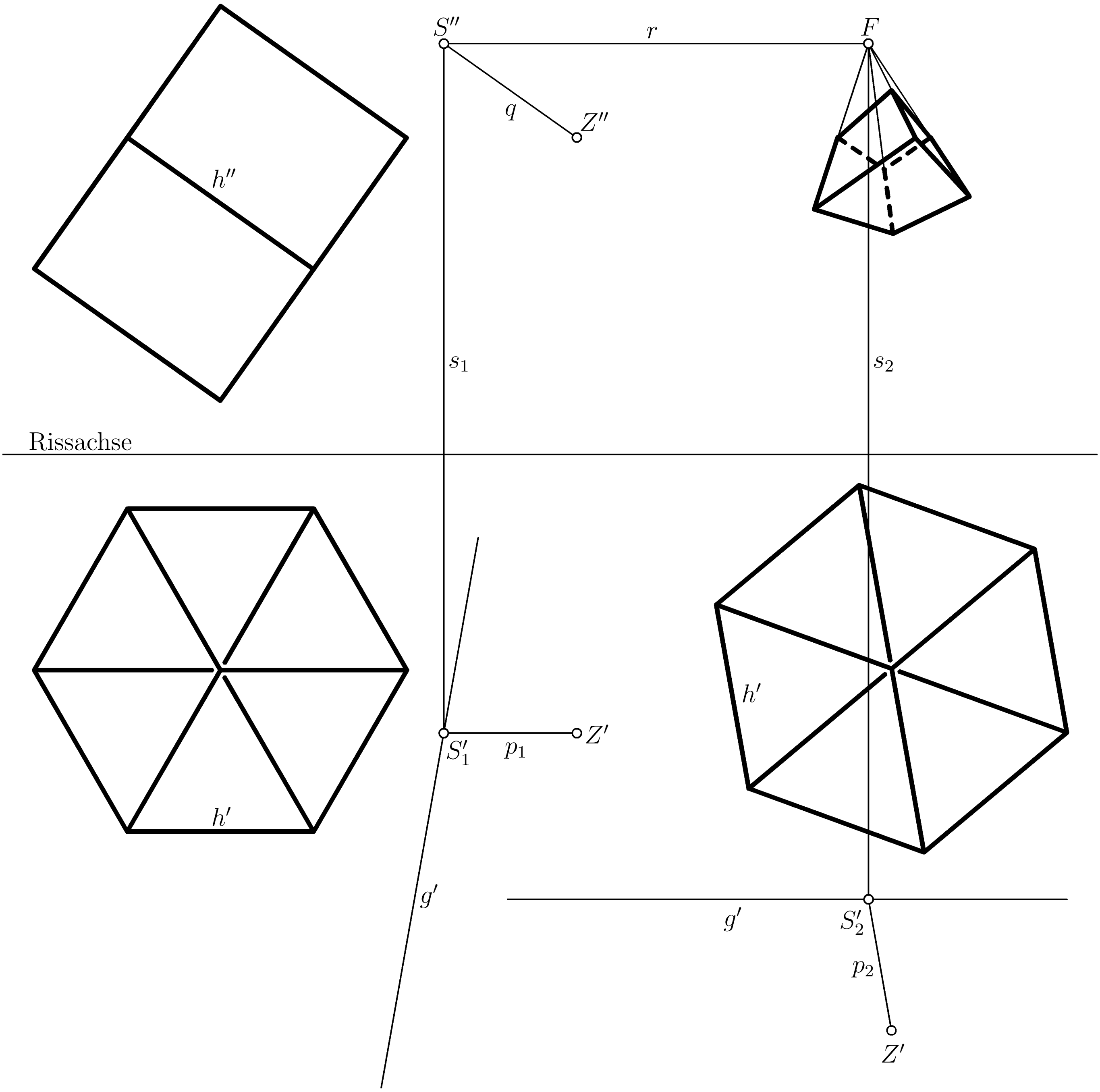
3.6 Übung: Konstruktion eines Zentralrisses (II)

Hier soll der Zentralriss eines Quaders konstruiert werden, wobei der Quader und die Angaben über Augpunkt und Zentralrissebene wieder in Grund- und Aufriss gegeben sind. Hier gibt es keine waagerechten Geraden, die ausgenutzt werden könnten. Daher wird jetzt vorgestellt, wie man Fluchtpunkte beliebiger Geraden konstruiert.

Vorlage



3.6.1 Fluchtpunkte beliebiger Geraden



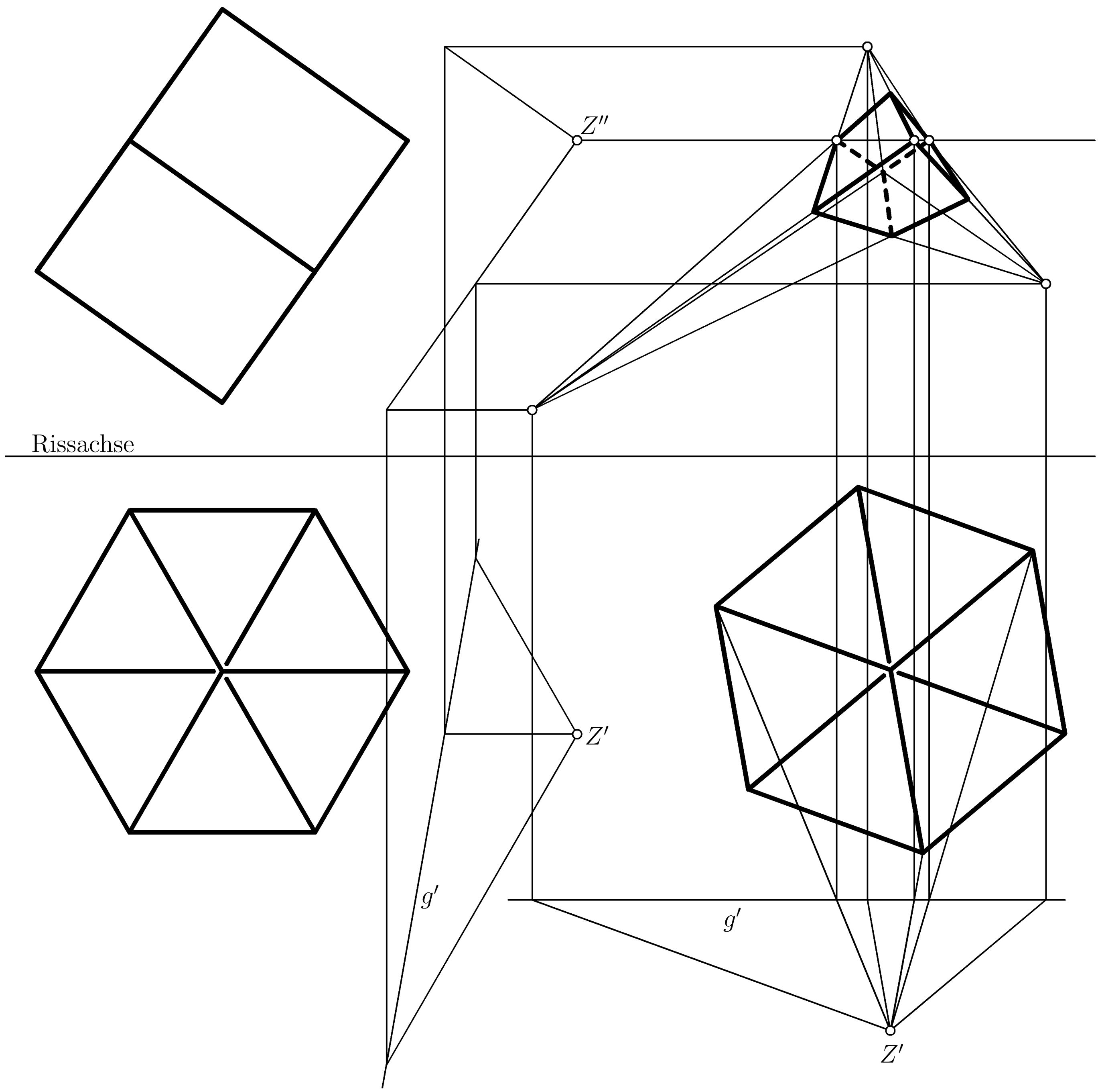
p_1, p_2	Parallele zu h' durch Z'
S'_1, S'_2	Schnittpunkte von p_1 und p_2 mit g'
s_1, s_2	Senkrechte zur Rissachse durch S'_1 und S'_2
q	Parallele zu h'' durch Z''
S''	Schnittpunkt von s_1 und q
r	Parallele zur Rissachse durch S''
F	Schnittpunkt von r und s_2

Konstruktion

Damit ist die Konstruktion nun analog zur Übung (I):

- Konstruiere 3 Fluchtpunkte von Graden. (F_1, F_2, F_3).
- Wähle 3 Eckpunkte des Quaders, die nicht auf einer Fläche liegen (hier: wähle sie auf dem Horizont; dies vereinfacht die Konstruktion), und konstruiere ihre Bilder. (A^*, B^*, C^*).
- Finde alle anderen Ecken als Schnittpunkte von Geraden. (Dabei führen neue Punkte auch zu neuen Geraden von den Fluchtpunkten aus.)

Lösung



3.7 Sichtbarkeit

Im Zentralriss ist sichtbar, was vom Augpunkt aus sichtbar ist. Im Zentralriss werden sichtbare Kanten durchgezeichnet, unsichtbare werden gestrichelt gezeichnet.

Übung: Zeichne in den Übungen 3.5 und 3.6 die unsichtbaren Kanten gestrichelt.

Kapitel 4

Grundelemente der Normalprojektion

Normalrisse sind ein wichtiges Instrument, um Zeichnungen eines räumlichen Objektes umkehrbar eindeutig zu machen und damit das räumlich Objekt erfassen zu können. Normalrisse werden für alle maßgerechten Zeichnungen eingesetzt, die Grundlage für die Entwurfs- und Ausführungsplanung sind.

Mit Hilfe der Normalrisse kann die Lage der verschiedenen Bauteile zueinander und im Raum sowie die wahre Gestalt und Größe der Bauteile ermittelt werden. Die Methode der Normalrisse kann benutzt werden, um räumliche Probleme in der Zeichnung zu lösen. Zum Beispiel können die Schnittlinien und Anschlüsse von verschiedenen Gebäudeteilen damit berechnet werden.

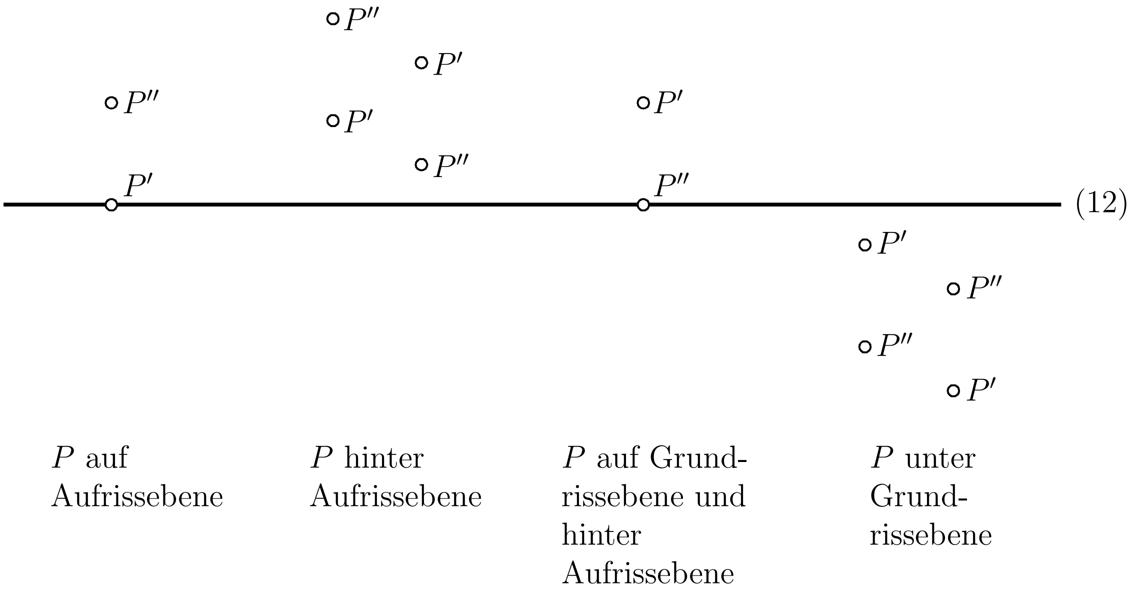
Um sich der Methode der Normalrisse systematisch zu nähern, wird hier zuerst eine Einführung in die geometrischen Grundelemente Punkt, Gerade und Ebene in Normalrissen behandelt. Danach werden diese Grundelemente zueinander in Beziehung gesetzt. Es wird zum Beispiel untersucht, ob ein Punkt in einer Ebene liegt oder in welcher Geraden sich zwei Ebenen schneiden.

Wir betrachten im Folgenden immer die Darstellung durch Grund- und Aufriss, also die Zweitafelprojektion.

4.1 Darstellung von Punkten

Ein Punkt P wird auf zwei Bildpunkte abgebildet: P' im Grundriss und P'' im Aufriss. Die beiden Punkte P' und P'' liegen auf einem Ordner senkrecht zur Rissachse (12).

Meistens sollte das abgebildete Objekt über der Grundrissebene und vor der Aufrissebene liegen. Es kann aber auch passieren, dass ein Punkt unter der Grundrissebene oder hinter der Aufrissebene liegt. Daher ist es erforderlich, immer die Bezeichnungen P' und P'' zu verwenden.
Verschiedene Lagen von Punkten:



Vereinbarung über die Sichtbarkeit einzelner Punkte:

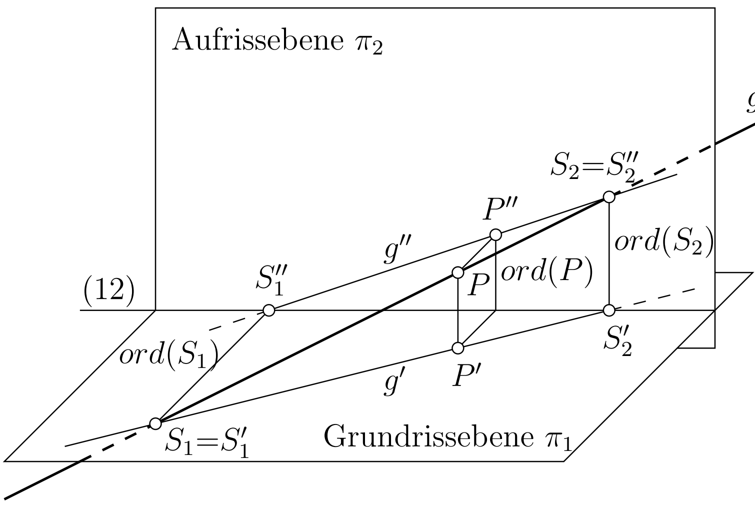
A liegt über B: A' verdeckt B'
C liegt vor D: C'' verdeckt D''

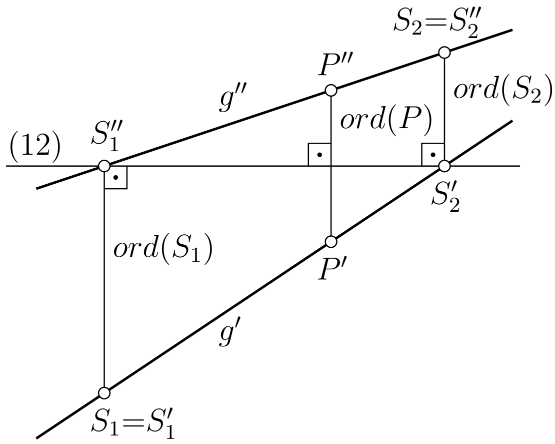
4.2 Darstellung von Geraden

Eine Gerade g ist bestimmt durch zwei Punkte auf der Geraden. Die Lage einer Geraden im Raum kann gekennzeichnet werden mit Hilfe der Durchstoßpunkte der Geraden durch die Rissebenen π_1 und π_2. Der Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Grundrissebene wird **Grundrissspurpunkt** S_1 genannt. Der Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Aufrissebene wird **Aufrissspurpunkt** S_2 genannt.

Es gilt:

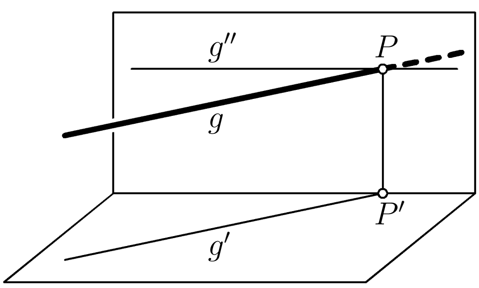
- S_1' liegt auf g', und S_1'' liegt auf g'' und der Rissachse (12).
- S_2' liegt auf g' und der Rissachse (12), und S_2'' liegt auf g''.
- Ist P ein Punkt auf g, so liegt P' auf g' und P'' auf g''. Außerdem liegen P' und P'' auf dem Ordner $ord(P)$.

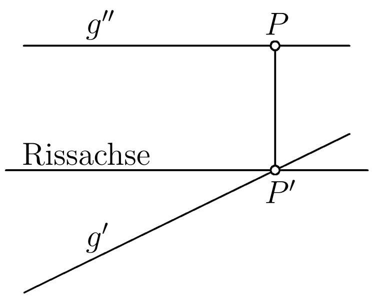




4.2.1 Hauptlinie erster Art oder Höhenlinie

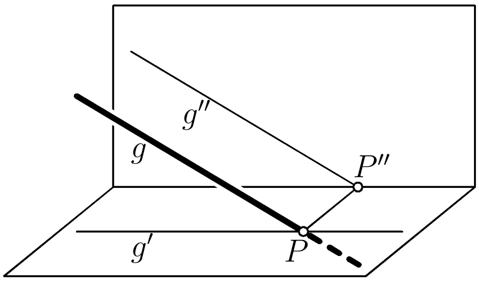
Ist eine Gerade g parallel zur Grundrissebene, so heißt sie **Hauptlinie 1. Art** oder **Höhenlinie** oder **Höhengerade**. Ob eine Gerade eine Höhenlinie ist, kann im Aufriss festgestellt werden. Eine Höhenlinie erscheint im Aufriss parallel zur Rissachse.

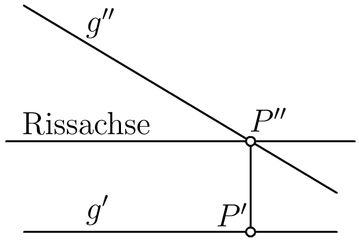




4.2.2 Hauptlinie zweiter Art oder Frontlinie

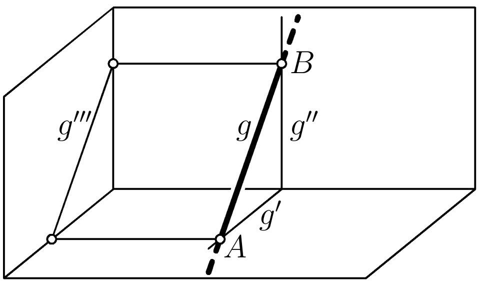
Ist eine Gerade g parallel zur Aufrissebene, so heißt sie **Hauptlinie 2. Art** oder **Frontlinie** oder **Frontgerade**. Ob eine Gerade eine Frontlinie ist, kann im Grundriss festgestellt werden. Eine Frontlinie erscheint im Grundriss parallel zur Rissachse.

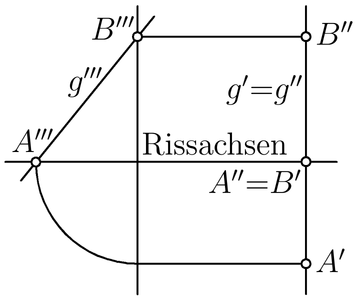




4.2.3 Hauptlinie dritter Art

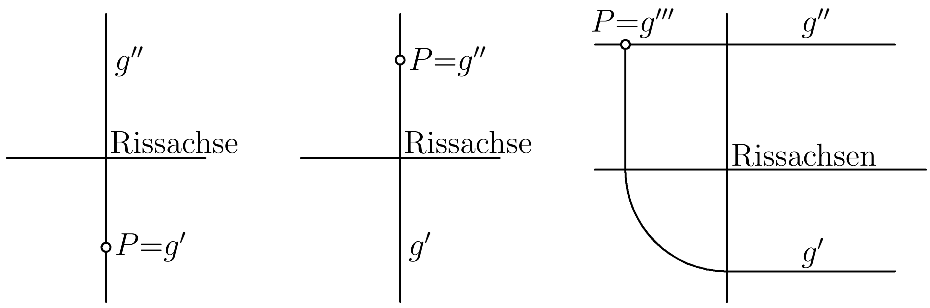
Ist eine Gerade g parallel zur Kreizrissebene, so heißt sie **Hauptlinie 3. Art**. Diese spezielle Lage kann man in Grund- und Aufriss nicht ablesen.





4.2.4 Projizierende Geraden

Ist eine Gerade g senkrecht zu einer der Rissebenen und parallel zu den anderen, so heißt sie **projizierend**. Man unterscheidet die **grundrissprojizierenden**, die **aufrissprojizierenden** und die **kreuzrissprojizierenden** Geraden.
Ist g grundrissprojizierend, so steht g senkrecht auf der Grundrissebene und verläuft parallel zu Auf- und Kreuzrissebene. Die Gerade g erscheint dann als Punkt im Grundriss und verläuft im Aufriss senkrecht zur Rissachse.
Ist g aufrissprojizierend, so steht g senkrecht auf der Aufrissebene und verläuft parallel zu Grund- und Kreuzrissebene. Die Gerade g erscheint dann als Punkt im Aufriss und verläuft im Grundriss senkrecht zur Rissachse.
Ist g kreuzrissprojizierend, so steht g senkrecht auf der Kreuzrissebene und verläuft parallel zu Grund- und Aufrissebene. Die Gerade g verläuft dann als waagerechte Linie in Grund- und Aufriss.

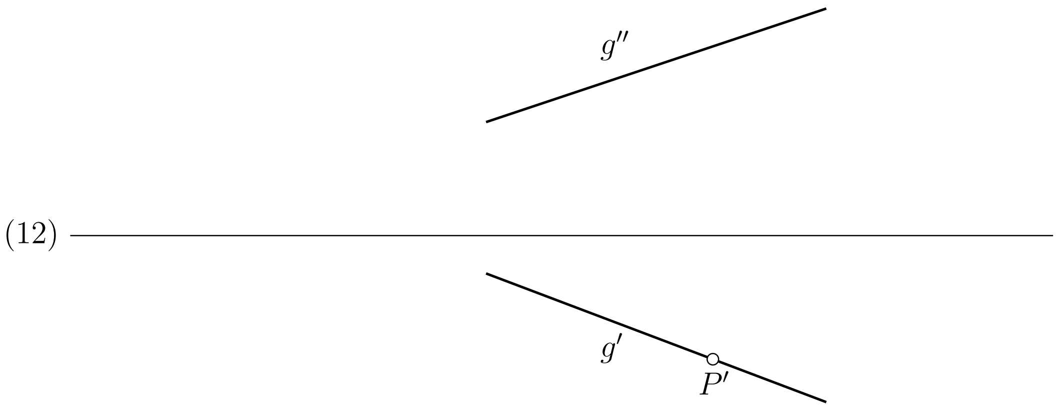


g senkrecht zur Grundrissebene π_1 — g senkrecht zur Aufrissebene π_2 — g senkrecht zur Kreuzrissebene π_3

4.3 Übung: Konstruktion von Spurpunkten

Aufgabe

Sei P ein Punkt auf der Geraden g. Konstruieren Sie den Aufriss von P und die Spurpunkte von g.



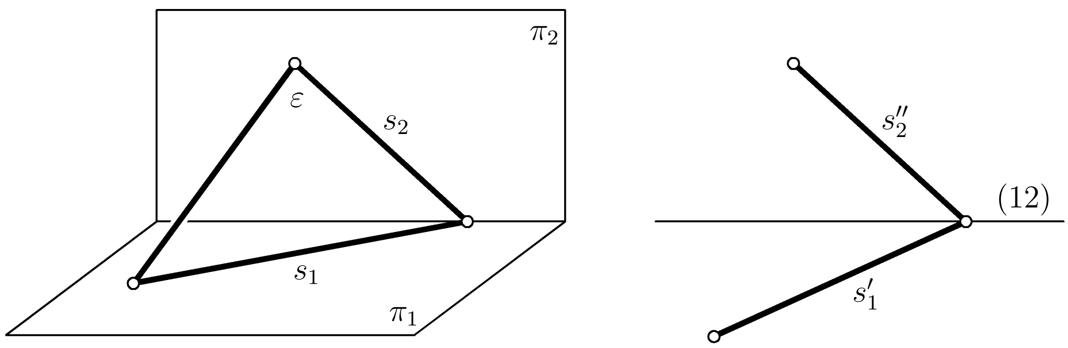
Konstruktion

- P'' liegt auf $ord(P)$ und auf g''.
- S_1'' liegt auf g'' und auf (12).
- S_1' liegt auf g' und auf $ord(S_1)$.
- S_2' liegt auf g' und auf (12).
- S_2'' liegt auf g'' und auf $ord(S_2)$.

4.4 Darstellung von Ebenen

Eine Ebene kann bestimmt werden durch

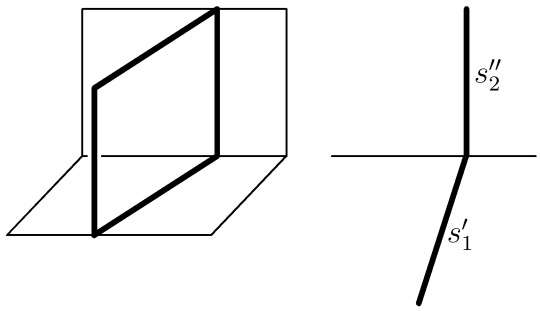
- zwei Geraden g und h, die entweder parallel sind oder sich schneiden: $\varepsilon = gh$;
- eine Gerade g und einen Punkt P, der nicht auf g liegt: $\varepsilon = gP$;
- drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen ($\varepsilon = PQR$).



Die Schnittgeraden s_1 und s_2 der Ebene ε mit den Rissebenen heißen **Spurgeraden** oder kurz **Spuren** der Ebene. Man unterscheidet die **Grundrissspur** und die **Aufrissspur**. Die Spuren der Ebene ε schneiden sich auf der Rissachse.

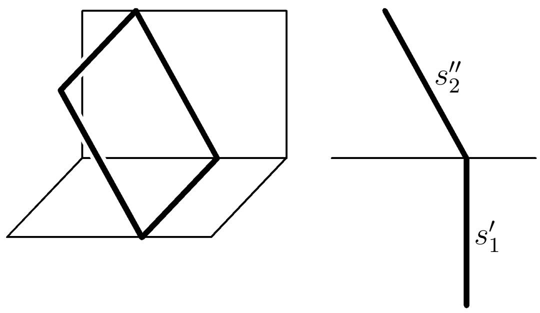
4.4.1 Erstprojizierende (grundrissprojizierende) Ebene

Ist eine Ebene senkrecht zur Grundrissebene, so heißt sie **erstprojizierend** oder **grundrissprojizierend**. Ihr Grundriss ist in diesem Falle eine Gerade und gleich der Grundrissspur.



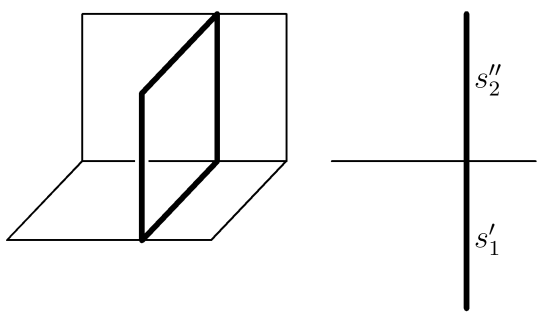
4.4.2 Zweitprojizierende (aufrissprojizierende) Ebene

Ist eine Ebene senkrecht zur Aufrissebene, so heißt sie **zweitprojizierend** oder **aufrissprojizierend**. Ihr Aufriss ist in diesem Falle eine Gerade und gleich der Aufrissspur.



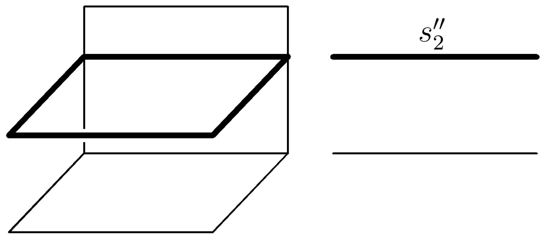
4.4.3 Doppeltprojizierende Ebene

Ist eine Ebene parallel zur Kreuzrissebene, so heißt sie **doppeltprojizierend**. Ihr Grund- und ihr Aufriss sind jeweils Geraden, die gleich der Grund- und Aufrissspur sind und außerdem senkrecht zur Rissachse (12) verlaufen.



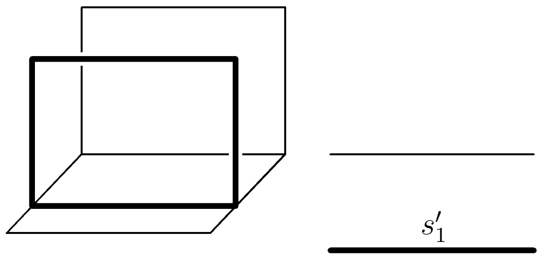
4.4.4 Höhen- oder Schichtebene

Ist eine Ebene parallel zur Grundrissebene, so heißt sie **Höhenebene** oder **Schichtebene**. Ihr Aufriss ist eine Gerade parallel zur Rissachse (12) und diese ist gleich der Aufrissspur.



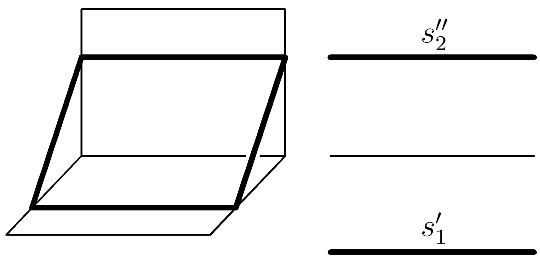
4.4.5 Frontebene

Ist eine Ebene parallel zur Aufrissebene, so heißt sie **Frontebene**. Ihr Grundriss ist eine Gerade parallel zur Rissachse (12) und diese ist gleich der Grundrissspur.



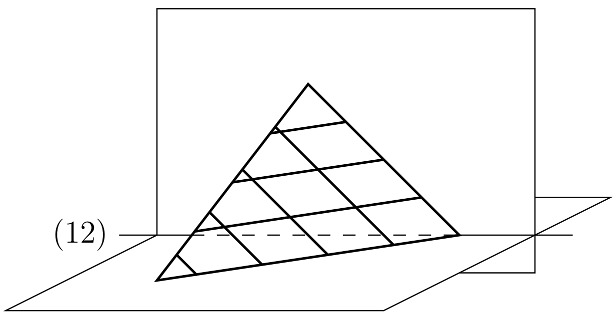
4.4.6 Pultebene

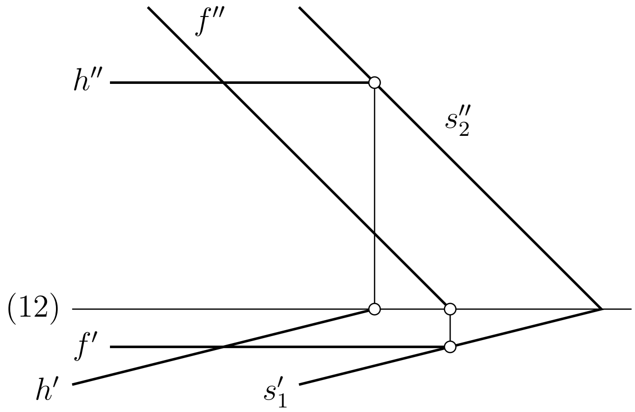
Ist eine Ebene senkrecht zur Kreuzrissebene, so heißt sie **Pultebene**. Ihr Kreuzriss ist eine Gerade. Ihre Grund- und Aufrissspuren sind Geraden parallel zur Rissachse (12).



4.4.7 Hauptlinien von Ebenen

Eine Teilgerade einer Ebene heißt **Hauptlinie**, wenn sie parallel zu einer der Rissebenen verläuft.



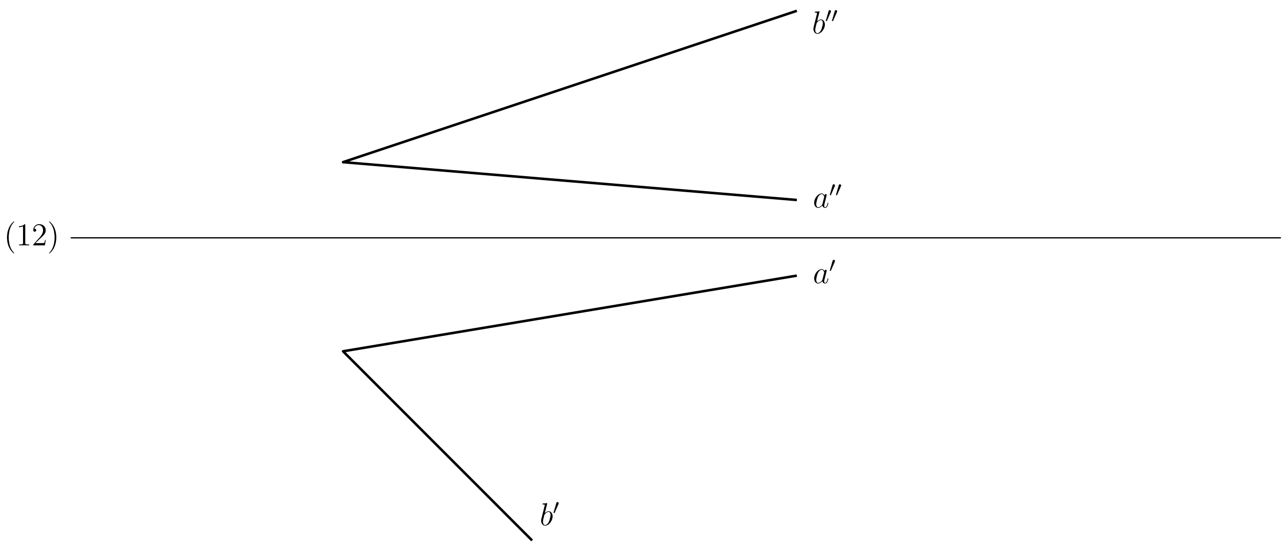


h ist parallel zur Grundrissebene.
f ist parallel zur Aufrissebene.

4.5 Übung: Konstruktion von Spurgeraden

Aufgabe

Sei $\varepsilon = ab$ eine Ebene. Konstruieren Sie die Spurgeraden von ε.



Konstruktion

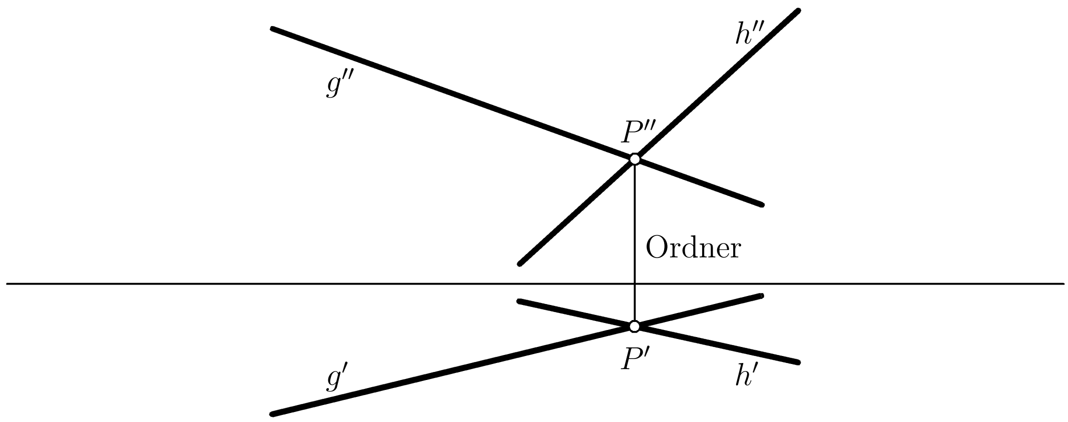
- Konstruiere zuerst die Spurpunkte $S_1(a), S_2(a), S_1(b), S_2(b)$ der Geraden a und b.
- Die Spurgeraden von ε sind dann die Verbindungsgeraden $S_1(a)S_1(b)$ und $S_2(a)S_2(b)$.

4.6 Lage zweier Geraden im Raum

Zwei verschiedene Geraden g und h im Raum können drei unterschiedliche Lagen zueinander einnehmen: g und h **schneiden sich**, g und h sind **parallel**, oder g und h sind **windschief**.

4.6.1 Zwei Geraden schneiden sich

Wenn zwei Geraden g und h sich schneiden, dann schneiden sich auch ihre Grundrisse g' und h' in einem Punkt P' und ihre Aufrisse g'' und h'' in einem Punkt P''. Weiter sind dann P' und P'' Grund- und Aufriss des Schnittpunktes P von g und h und daher liegen P' und P'' auf einem Ordner.



4.6.2 Zwei Geraden sind parallel

Sind zwei Geraden g und h parallel und nicht projizierend, so sind g', g'', h' und h'' Geraden und es gilt $g' \parallel h'$ und $g'' \parallel h''$.

Sind zwei Geraden g und h projizierend, so sind sie parallel, falls sie senkrecht auf derselben Rissebene stehen.

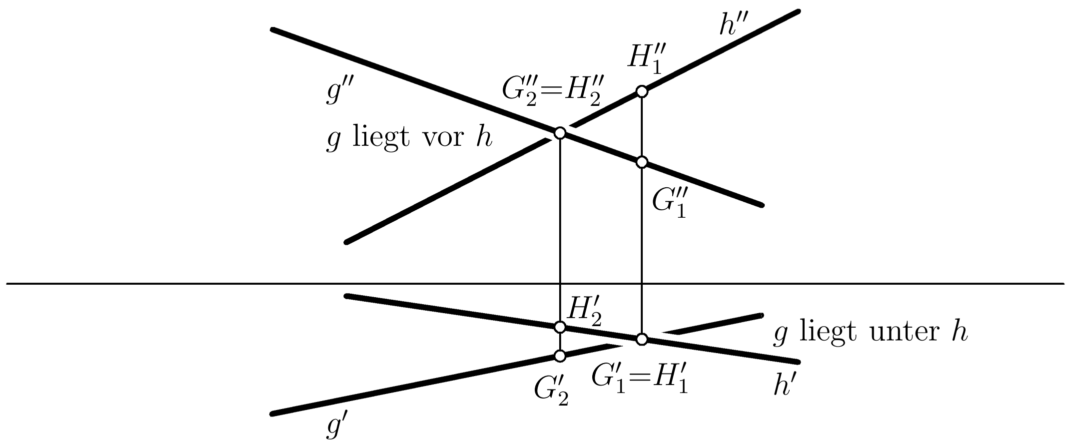
4.6.3 Zwei Geraden sind windschief

Zwei Geraden g und h sind windschief, wenn sie weder parallel zueinander sind noch sich schneiden. Es kann passieren, dass sich ihr Grund- und ihr Aufriss schneiden, aber die Schnittpunkte liegen dann nicht auf einem Ordner. Schreibe:

- $G_1' = H_1' = g' \cap h'$ im Grundriss.
- $G_2'' = H_2'' = g'' \cap h''$ im Aufriss.

Für die Schnittpunkte der beiden Geraden in Grund- und Aufriss ist die Frage der Sichtbarkeit zu klären. Die jeweils verdeckte Gerade wird unterbrochen gezeichnet. Es gilt:

- G_1'' unter H_1'' im Aufriss („g liegt unter h“) $\Longrightarrow$ g' unterbrochen.
- G_2' unter H_2' im Grundriss („g liegt vor h“) $\Longrightarrow$ h'' unterbrochen.



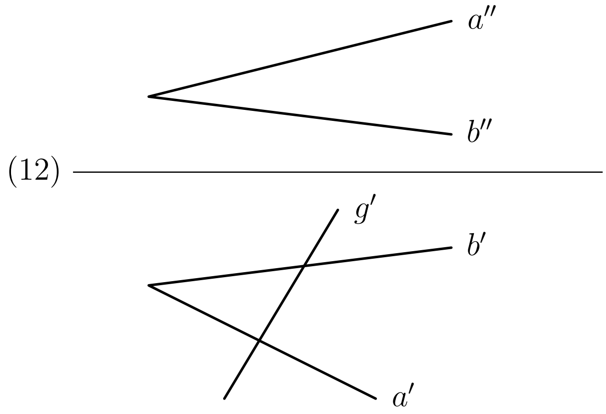
Bei allen Konstruktionen muss auf den Unterschied zwischen wahren und scheinbaren Schnittpunkten geachtet werden. Nur mindestens zwei zugeordnete Normalrisse können die Lage im Raum eindeutig kennzeichnen.

Liegen zwei Geraden in einer Ebene, so sind sie entweder parallel, oder sie schneiden sich. Windschief können sie in diesem Fall nicht sein.

4.7 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (I)

Aufgabe

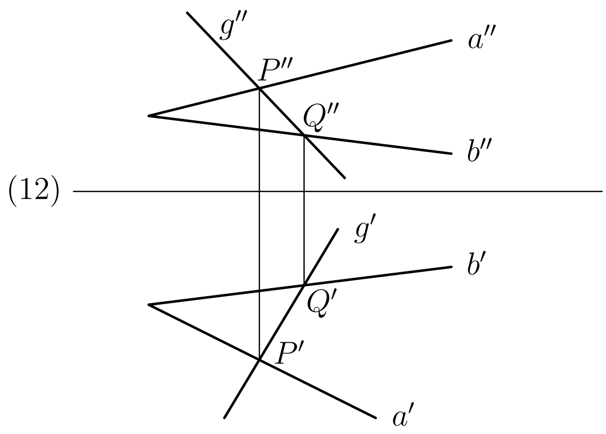
Gegeben sei eine Ebene, definiert durch zwei sich schneidende Geraden a und b, und der Grundriss g' einer in ab enthaltenen Geraden g. Gesucht ist der Aufriss g'' von g.



Konstruktion

- g schneidet beide Geraden a und b. Sei P der Schnittpunkt von g mit a und Q der Schnittpunkt von g mit b.
- Die Grundrisse P' und Q' sind dann die Schnittpunkte von g' mit a' und von g' mit b'.
- Die Aufrisse P'' und Q'' können durch die Ordner von P' und O' und deren Schnittpunkt mit a'' und b'' konstruiert werden.

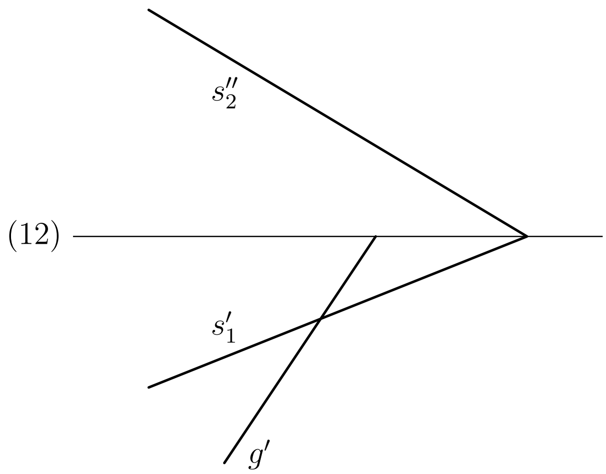
Lösung



4.8 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (II)

Aufgabe

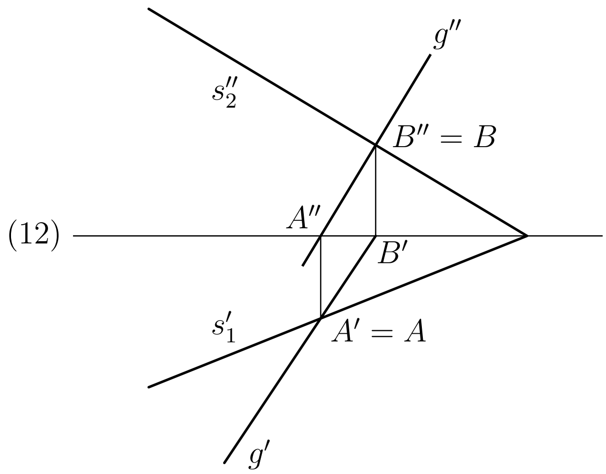
Gegeben sei eine Ebene, definiert durch ihre Spurgeraden s_1 und s_2, und der Grundriss g' einer in der Ebene enthaltenen Geraden g. Gesucht ist der Aufriss g'' von g.



Konstruktion

Dies ist ein Spezialfall der Übung Inzidenzen (I): Wieder ist eine Ebene durch zwei Geraden gegeben, nur sind die Geraden jetzt die Spurgeraden. In Grund- und Aufriss erscheint daher nur jeweils eine Gerade. Die beiden anderen Grund- und Aufrisse s_2' und s_1'' entsprechen gerade der Rissachse (12). Damit kann nun genau wie in der Übung Inzidenzen (I) verfahren werden.

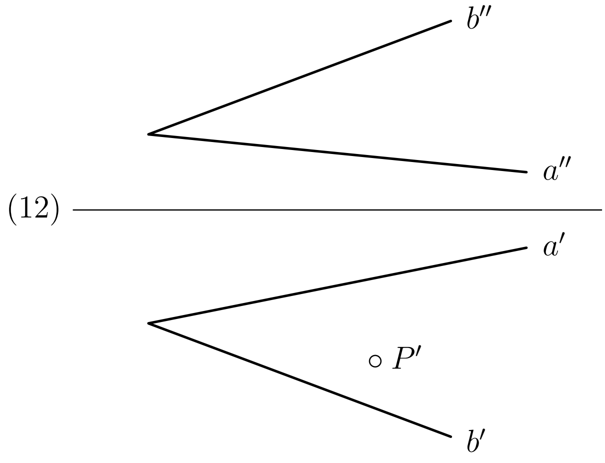
Lösung



4.9 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (III)

Aufgabe

Gegeben sei eine Ebene ab und der Grundriss P' eines Punktes auf ab. Gesucht ist der Aufriss P'' von P.

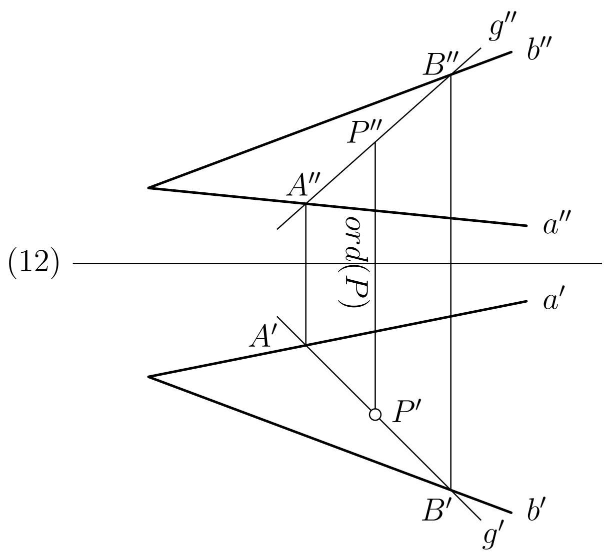


Konstruktion

- Wähle eine Gerade g in der Ebene ab durch den Punkt P.
- Zeichne zunächst nur g' und erhalte die Schnittpunkte A' von g' mit a' und B' von g' mit b'.
- Konstruiere nun g'' nach (Inzidenzen I).
- Dann liegt P'' auf g'' und auf dem Ordner $ord(P')$. Damit kann P'' konstruiert werden.

Diese Konstruktion wird auch als 'Angittern' von P bezeichnet.

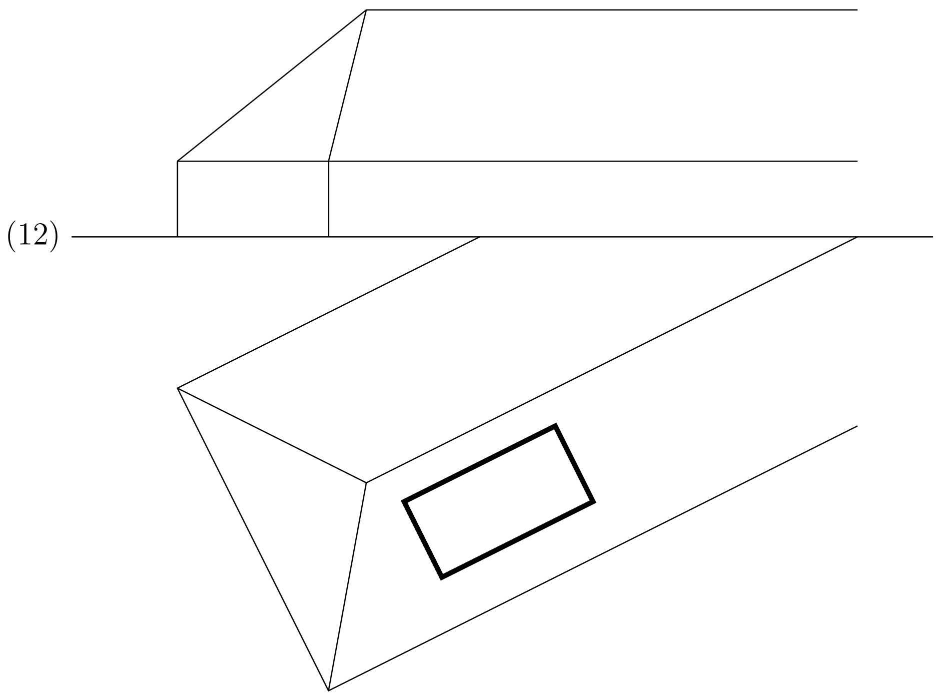
Lösung



4.10 Übung: Konstruktion von Inzidenzen (IV)

Aufgabe

Gegeben sind Grund- und Aufriss einer Dachfläche sowie der Grundriss eines Dachflächenfensters. Gesucht ist der Aufriss des Dachflächenfensters.



Konstruktion

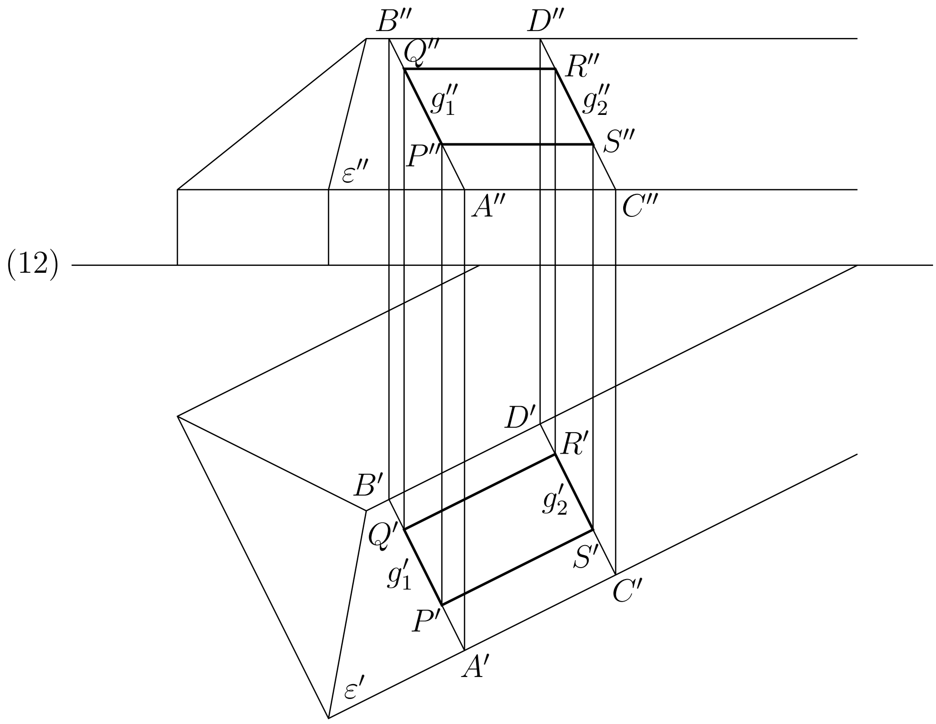
Hier können die Konstruktionen von Inzidenzen verwendet werden. Es gibt dazu verschiedene Möglichkeiten:

- Konstruiere den Aufriss der 4 Geraden des Dachfesterns nach Inzidenzen (I).
- Konstruiere den Aufriss der 4 Ecken des Dachfesterns nach Inzidenzen (III).

Schneller geht es mit der folgenden Variante:

- Konstruiere den Aufriss von zwei parallelen Geraden des Dachfensterns nach Inzidenzen (I).
- Konstruiere die 4 Ecken des Dachfensters nun mit Hilfe ihrer Ordner: jede Ecke liegt auf einer der konstruierten Geraden und auf ihrem Ordner.

Lösung



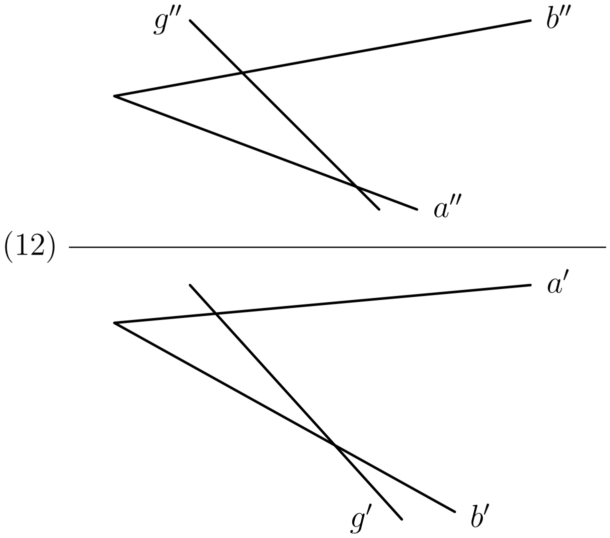
4.11 Sichtbarkeit

Im Grundriss ist sichtbar, was bei Blick von vorne sichtbar ist. (Lese aus Aufriss ab!)
Im Aufriss ist sichtbar, was bei Blick von vorne sichtbar ist. (Lese aus Grundriss ab!)

4.12 Übung: Konstruktion von Lagen (I)

Aufgabe

Gegeben sei eine Gerade g und eine Ebene ab in Grund- und Aufriss. Die Ebene ab sei nicht erstprojizierend, d.h. sie sei nicht senkrecht zur Grundrissebene. Weiter sei g nicht in ab. Gesucht ist der Durchstoßpunkt P von g mit ab, d.h. der Schnittpunkt der Geraden mit der Ebene.

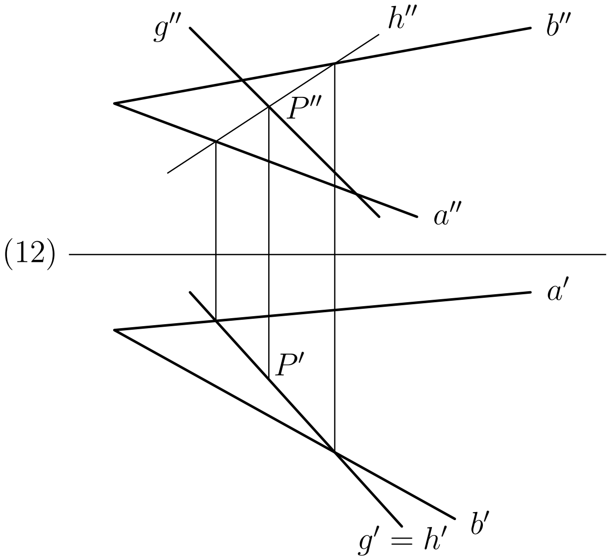


Konstruktion

- Konstruiere zuerst die in ab enthaltene Gerade h mit $h' = g'$ nach Inzidenzen (I). Diese Gerade h heißt auch 'Deckgerade' von g.
- P' liegt auf g', also liegt P auf h.
- P'' ist dann der Schnittpunkt von h'' und g''.
- P' erhält man über den Ordner von P.

Anschließend an die Konstruktion entscheide über die Sichtbarkeit der Geraden g. Nicht sichtbare Teile von g' und g'' werden gestrichelt eingezeichnet.

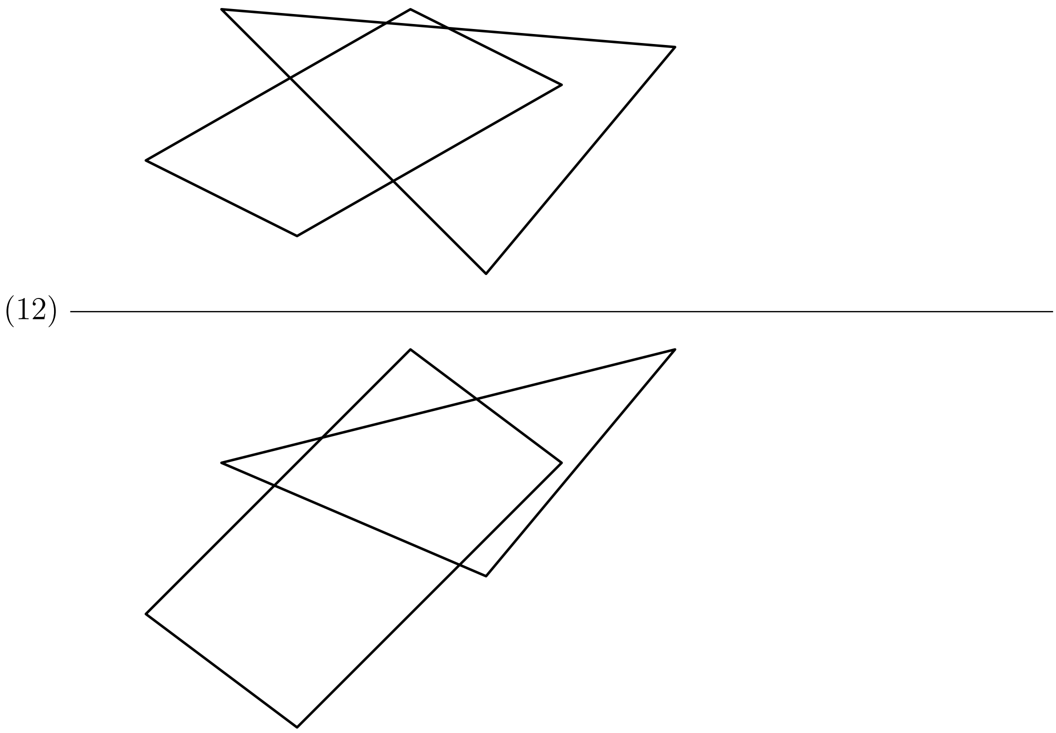
Lösung



4.13 Übung: Konstruktion von Lagen (II)

Aufgabe

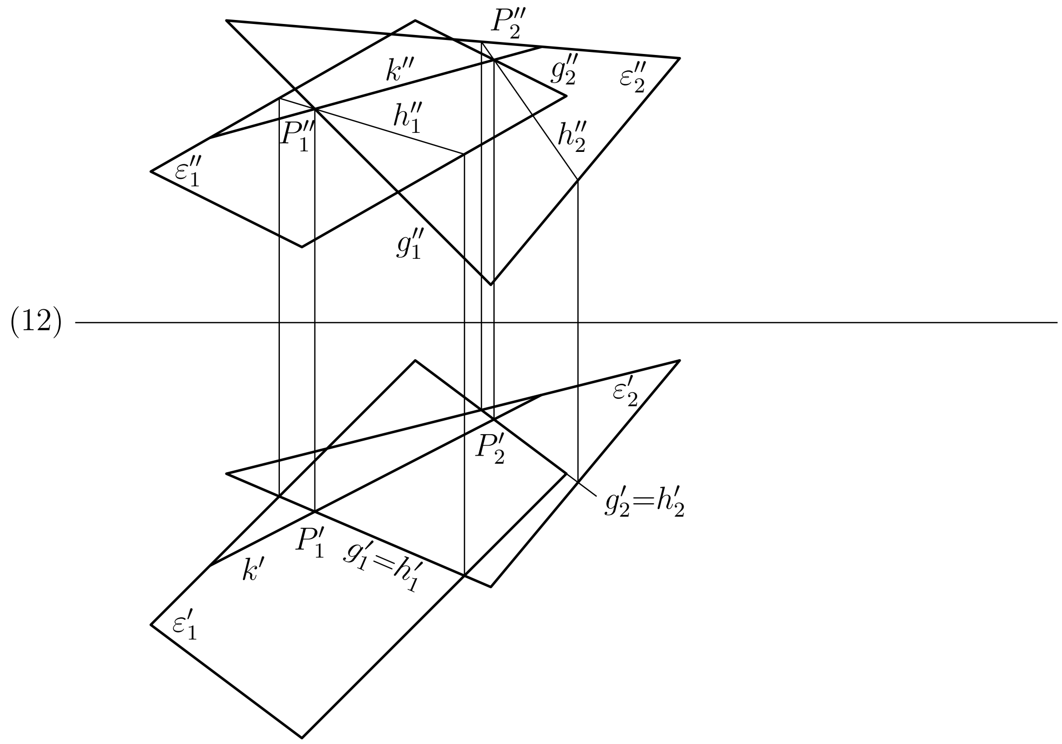
Gegeben seien zwei Ebenen in Grundriss und Aufriss. Gesucht ist die Schnittgerade der beiden Ebenen.



Konstruktion

Diese Aufgabe wird auf Lagen (I) zurückgeführt: Man bestimme geeignete Teilgeraden der ersten Ebene sowie die Durchstoßpunkte in der zweiten Ebene. Die Verbindungsgerade zweier solcher Punkte ist die gesuchte Schnittgerade.

Lösung

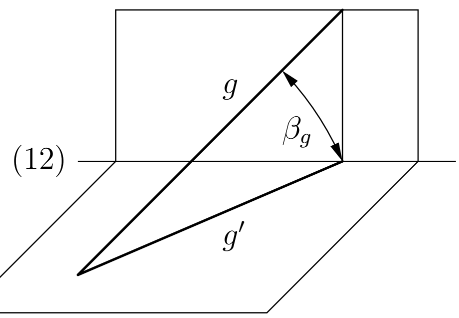


- $g_1 \in \varepsilon_2$ (Kante)
- h_1 Deckgerade von g_1 in ε_1
- $P_1 \in g_1 \cap \varepsilon_2$
- $g_2 \in \varepsilon_1$ (Kante)
- h_2 Deckgerade von g_1 in ε_2
- $P_2 \in g_2 \cap \varepsilon_1$
- $k = P_1P_2$

4.14 Neigungswinkel

4.14.1 Geraden

Der **Neigungswinkel einer Geraden** g gegen die Grundrissebene ist der Winkel β_g zwischen g und dem Grundriss g':

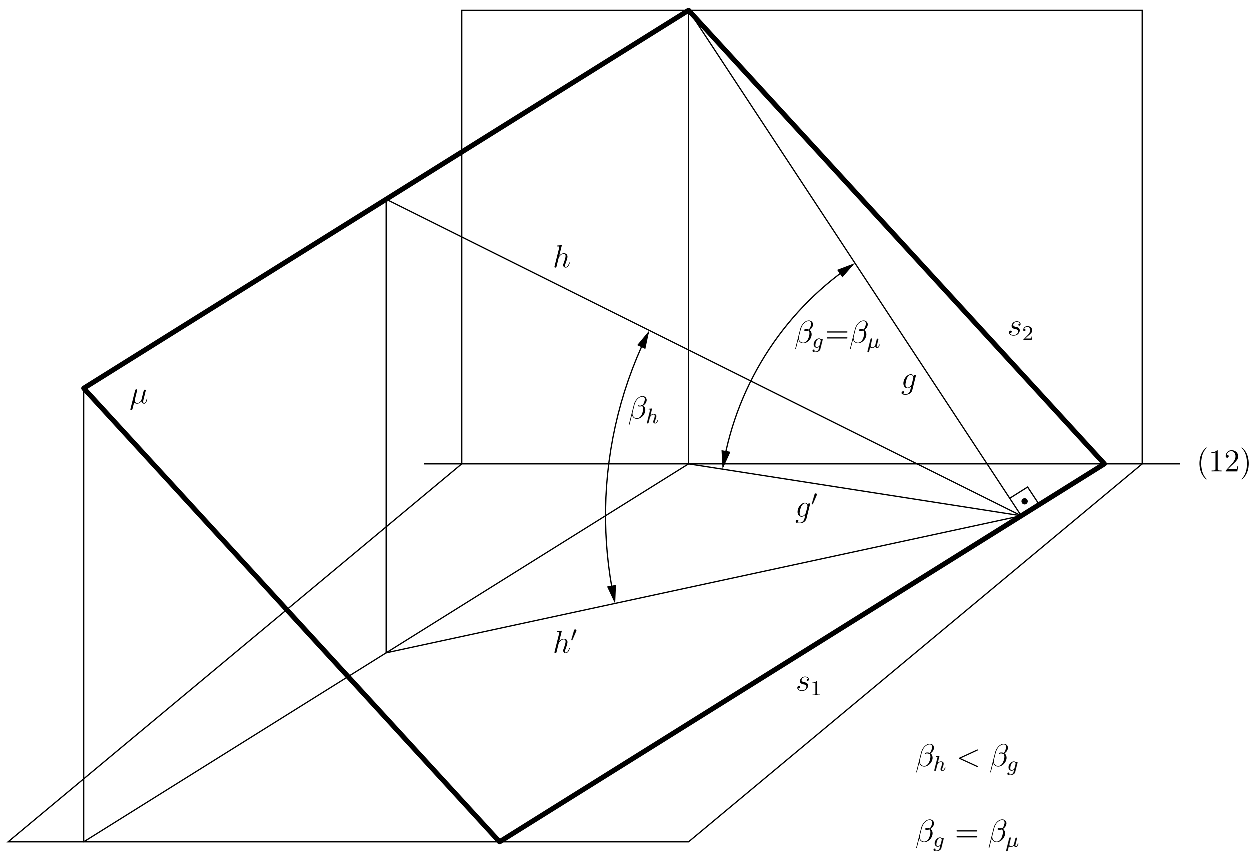


4.14.2 Ebenen und Fallgeraden

In einer Ebene μ liegen Geraden g mit unterschiedlichen Neigungswinkeln. Der größte vorkommende Winkel β_g wird als **Neigungswinkel der Ebene** β_μ angesehen.

Wenn g in μ enthalten ist und senkrecht zur Grundrissspur s_1 von μ steht, dann heißt g eine **Fallgerade** von μ.

Es gilt: Der Neigungswinkel von μ ist der Neigungswinkel einer Fallgeraden von μ.

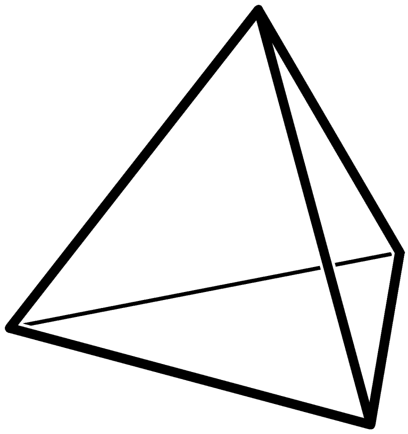


Kapitel 5

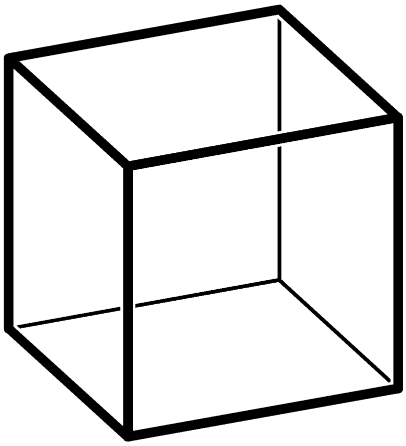
Platonische Körper

In diesem Kapitel werden die Methoden aus den vorherigen Kapiteln angewendet, um Schnittfiguren durch gewisse Objekte zu konstruieren.

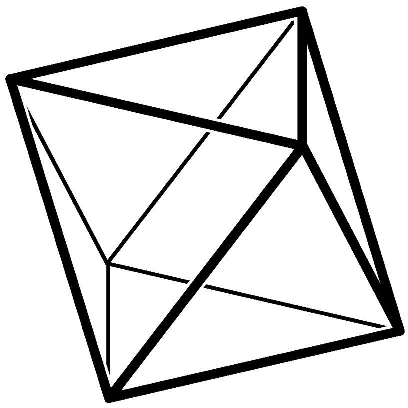
Als Objekte werden die platonischen Körper herangezogen. Dies sind konvexe Polyeder, bei denen an jeder Ecke q reguläre kongruente p-Ecke zusammenstoßen. Es gibt fünf Platonische Körper:



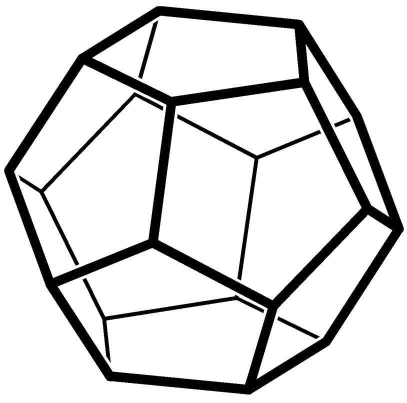
$p = q = 3$: Tetraeder



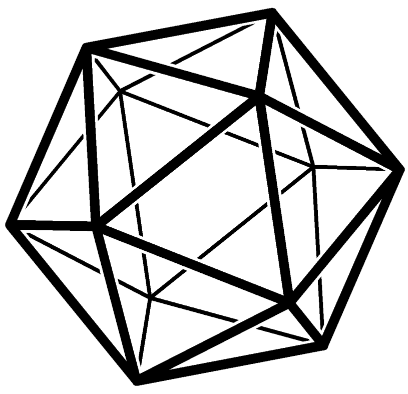
$p = 4$, $q = 3$: Hexaeder, Würfel



$p = 3$, $q = 4$: Oktaeder



$p = 5$, $q = 3$: Dodekaeder

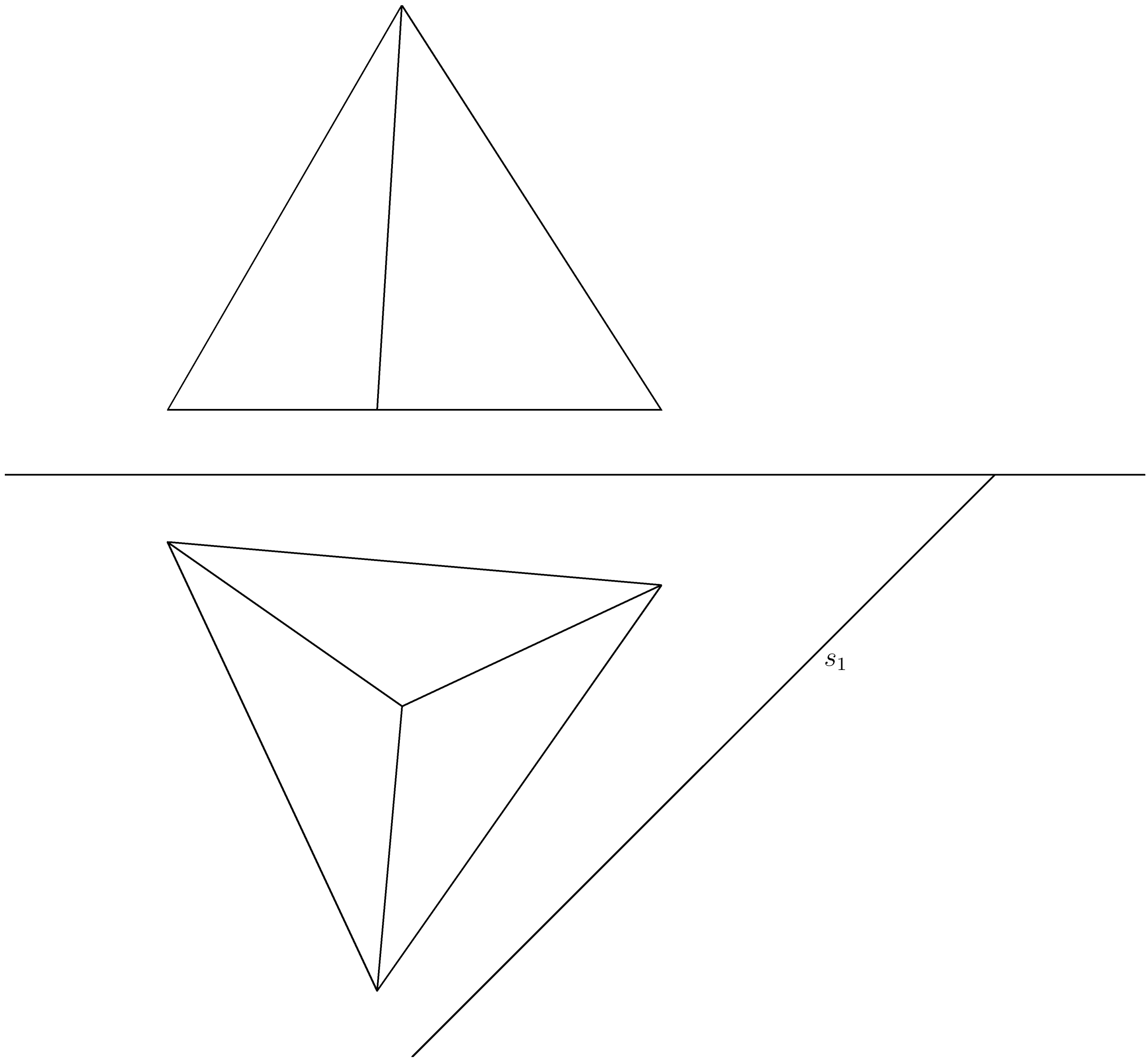


$p = 3$, $q = 5$: Ikosaeder

5.1 Übung: Schnittfigur

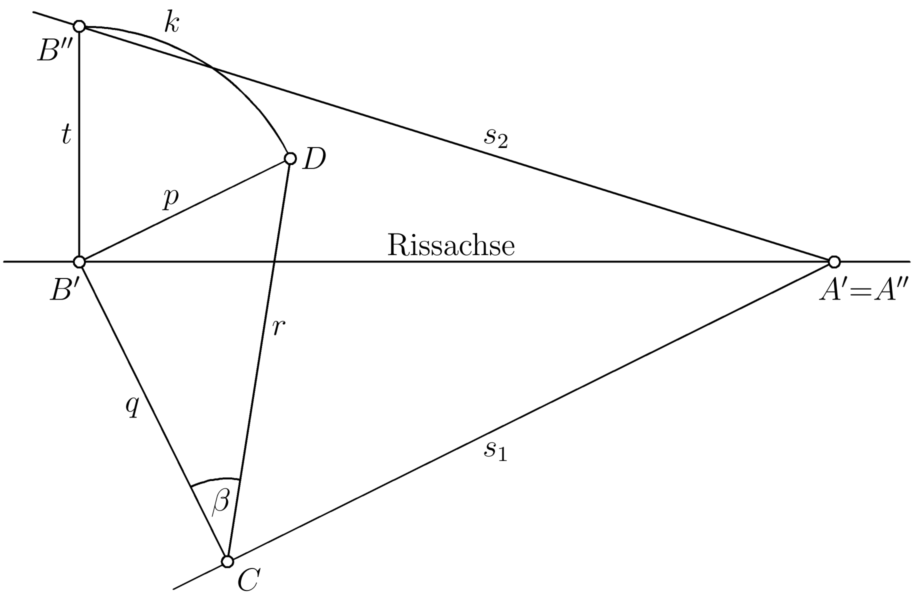
Die Gerade s_1 ist die Grundrissspur einer Ebene mit der Neigung 30°. Konstruieren Sie den Schnitt des Tetraeders mit der Ebene. Zeichnen Sie sichtbare Kanten durchgezogen, unsichtbare gestrichelt.

Aufgabe



5.1.1 Spurgeraden einer Ebene

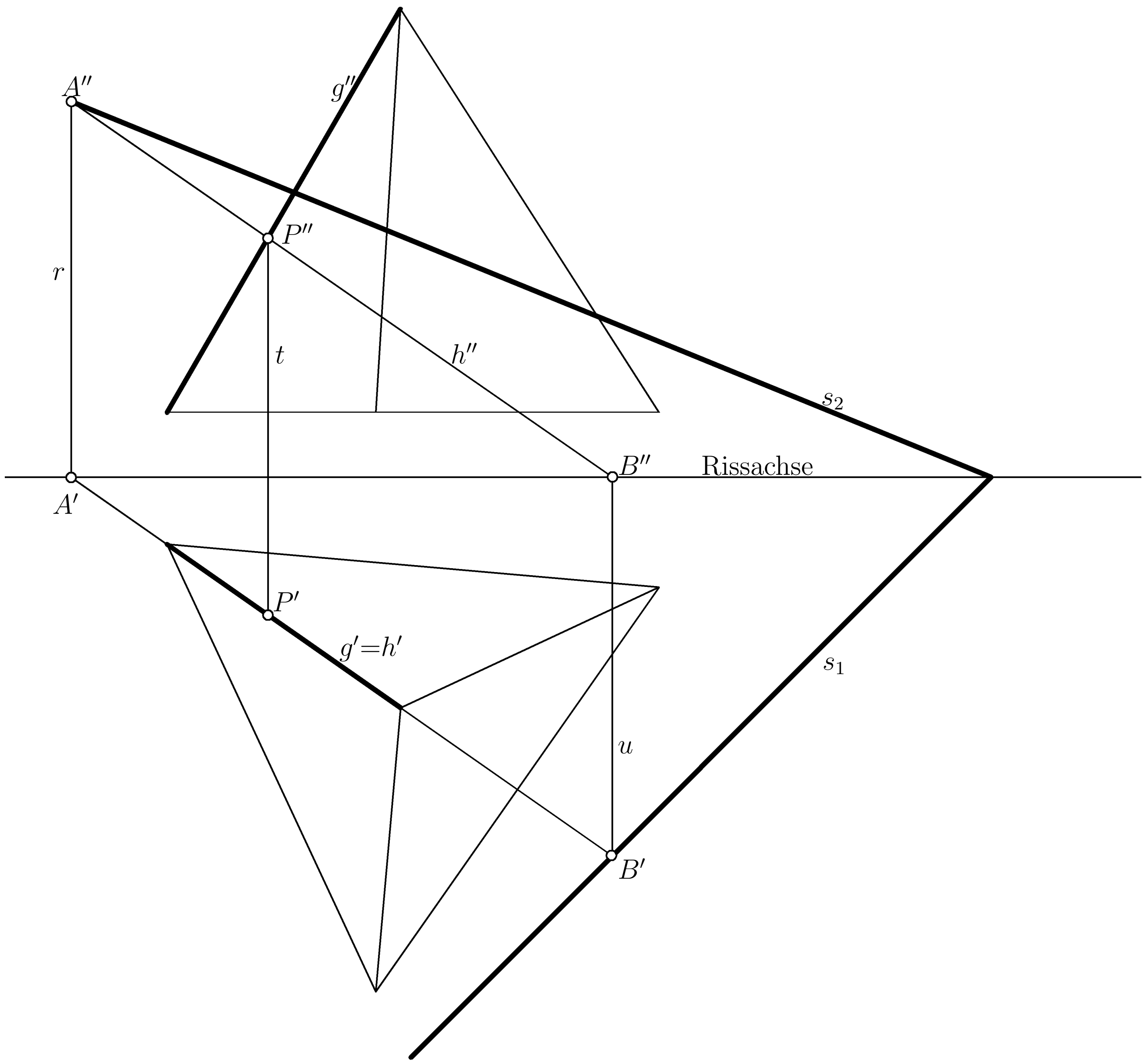
Gegeben: Grundrissspur s_1 und Neigungswinkel β einer Ebene
Gesucht: Aufrissspur s_2 der Ebene



s_1	Grundrissspur der Ebene
$A' = A''$	Schnittpunkt von s_1 und der Rissachse
B'	Punkt auf der Rissachse
p	Parallele zu s_1 durch B'
q	Senkrechte zu s_1 durch B'
C	Schnittpunkt von s_1 und q
β	Neigungswinkel der Ebene
r	Gerade durch C im Winkel β zu q
D	Schnittpunkt von p und r
k	Kreis um B' mit dem Radius $\overline{B'D}$
t	Senkrechte zur Rissachse durch B'
B''	Schnittpunkt von t und k
s_2	Gerade durch A'' und B''

5.1.2 Schnittpunkt mit einer Geraden

Gegeben: Grund- und Aufriss einer Geraden g sowie Spurgeraden s_1 und s_2 einer Ebene
Gesucht: Grund- und Aufriss des Schnittpunktes P von Ebene und Gerade



Sei h eine Deckgerade von g, d.h. eine Gerade in der Ebene, die den gleichen Grundriss wie g hat. Damit ist der Grundriss von h gegeben und wir konstuieren zuerst den Aufriss von h nach Inzidenzen (II). Der Schnittpunkt von g'' und h'' liegt in der Ebene und ist damit P''. Nun erhalte P' über den Ordner von P.

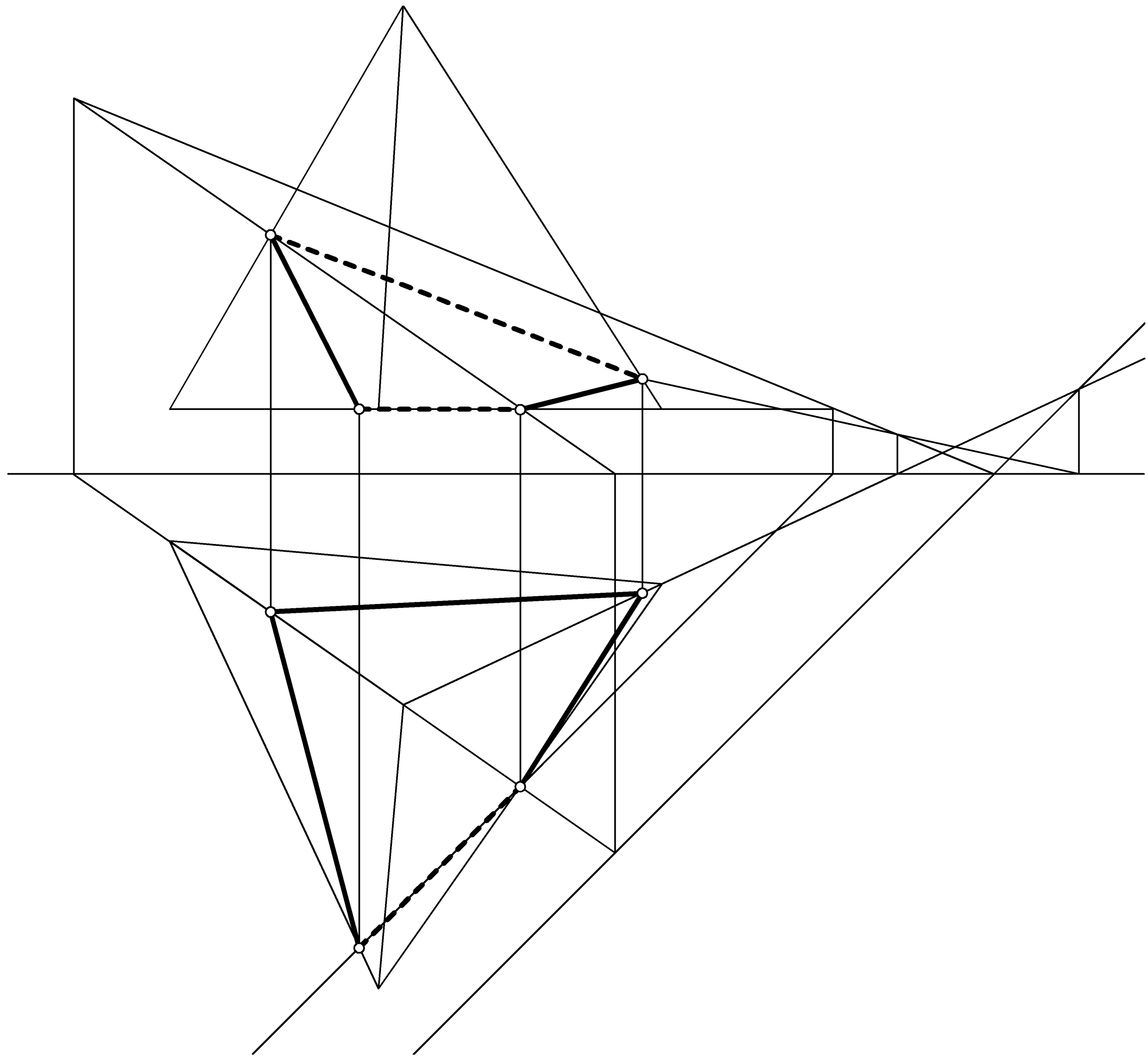
$g'=h'$	Grundriss der Geraden g und h
A'	Schnittpunkt von h' und der Rissachse
r	Senkrechte zur Rissachse durch A'
A''	Schnittpunkt von r und s_2
B'	Schnittpunkt von h' und s_1
u	Senkrechte zur Rissachse durch B'
B''	Schnittpunkt von u und der Rissachse
h''	Gerade durch A'' und B''
P''	Schnittpunkt von g'' und h''
t	Senkrechte zur Rissachse durch P''
P'	Schnittpunkt von t und g'

Konstruktion

Für die Lösung der Aufgabe nehmen wir jede Kante des Polyeders und berechnen den Schnittpunkt. Die Verbindung aller dieser Schnittpunkte ist dann die gesuchte Schnittfigur. Ein paar Bemerkungen dazu:

- Die Deckgerade h zu einer Gerade g kann für alle Kanten mit gleichem Grundriss gleichzeitig benutzt werden.
- Ist h' parallel zur Rissachse, so ist h'' parallel zu s_2.
- Ist h' parallel zu s_1, so ist h'' parallel zur Rissachse.
- Die Konstruktion kann auch mit $h'' = g''$ ‘von oben nach unten’ durchgeführt werden.

Lösung



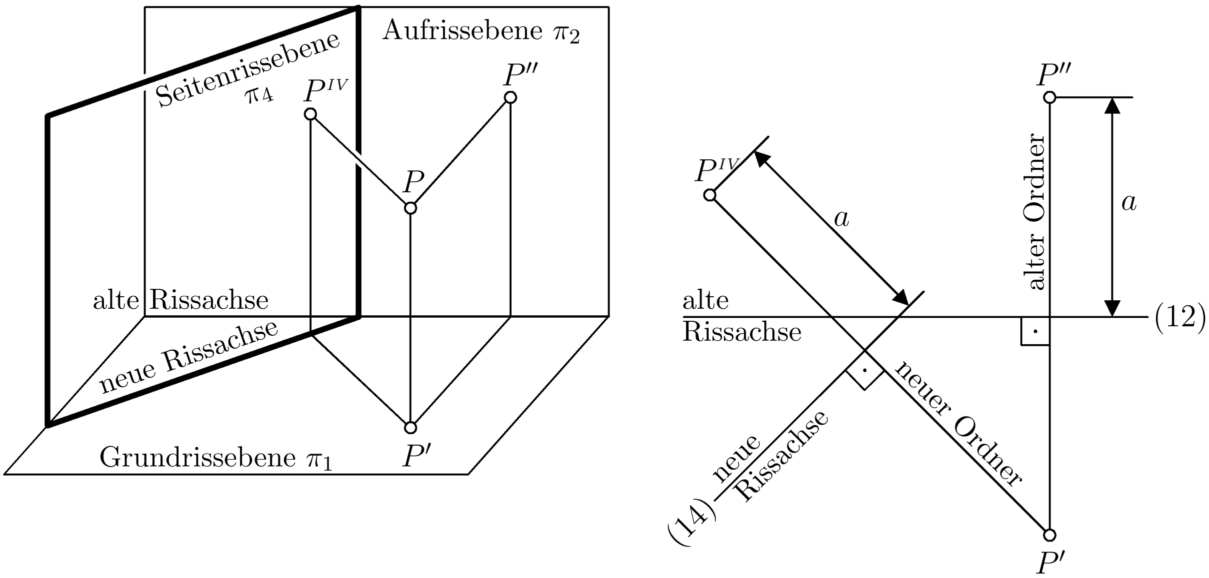
Kapitel 6

Seitenrisse

Manchmal ist es sehr nützlich, neben der Grund-, Auf- und Kreuzrissebene eine neue Rissebene, genannt **Seitenrissebene**, einzuführen. Zum Beispiel kann man damit manchmal ein Objekt anschaulicher darstellen oder es können Maßaufgaben leichter gelöst werden. Die Konstruktion des Seitenrisses aus einer Zweitafelprojektion wird **umprojizieren** genannt.

6.1 Die Seitenrissebene

So wie Grund- und Aufriss immer senkrecht aufeinander stehen, muss auch die neue Seitenrissebene π_4 senkrecht auf einer der bisherigen Rissebenen stehen (also $\pi_4 \perp \pi_1$ oder $\pi_4 \perp \pi_2$ oder $\pi_4 \perp \pi_3$).



Im Beispiel steht die Seitenrissebene senkrecht auf der Grundrissebene. Nach dem Umprojizieren ist der Aufriss überflüssig geworden und kann daher weggelassen werden. Man nennt in diesem Fall die Aufrissebene auch **wegfallende Rissebene**. Die Rissachse zwischen Grund- und Aufrissebene heißt **wegfallende Rissachse**.

Ein Seitenriss kann in der Zweitafelprojektion durch die Angabe einer neuen Rissachse eingeführt werden.
Es gilt:

- Der Abstand des neuen Risses von der neuen Rissachse ist gleich dem Abstand des alten Risses von der alten Rissachse.
- Mit (12) als wegfallende Rissachse und (14) als neue Rissachse ergibt sich daher:

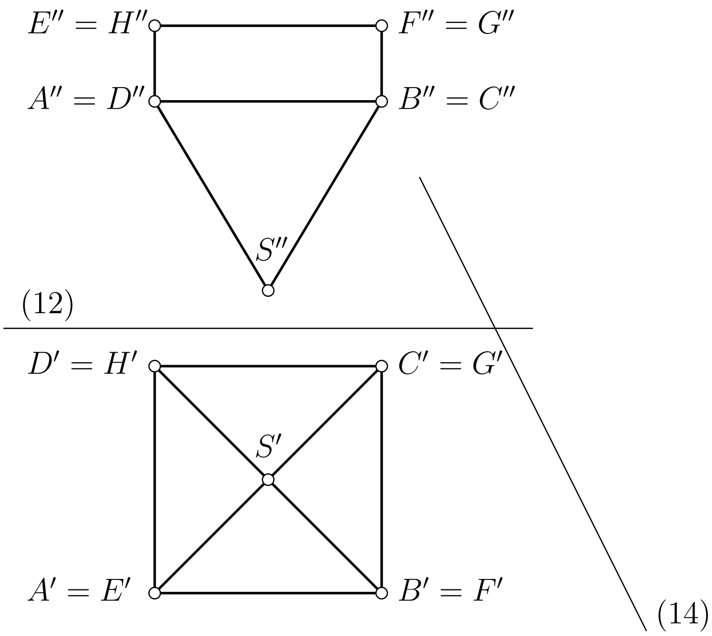
$$P^{IV} \text{ liegt auf } ord(P') \text{ bzgl. (14) mit } abst(P^{IV}, (14)) = abst(P'', (12)).$$

Die Richtung, in welcher die Abtragung erfolgt, ist nicht festgelegt. Hat man sich aber bei einem Objekt für die Richtung entschieden, so liegt die Richtung für alle Objekte fest.

6.2 Übung: Konstruktion eines Seitenrisses

Aufgabe

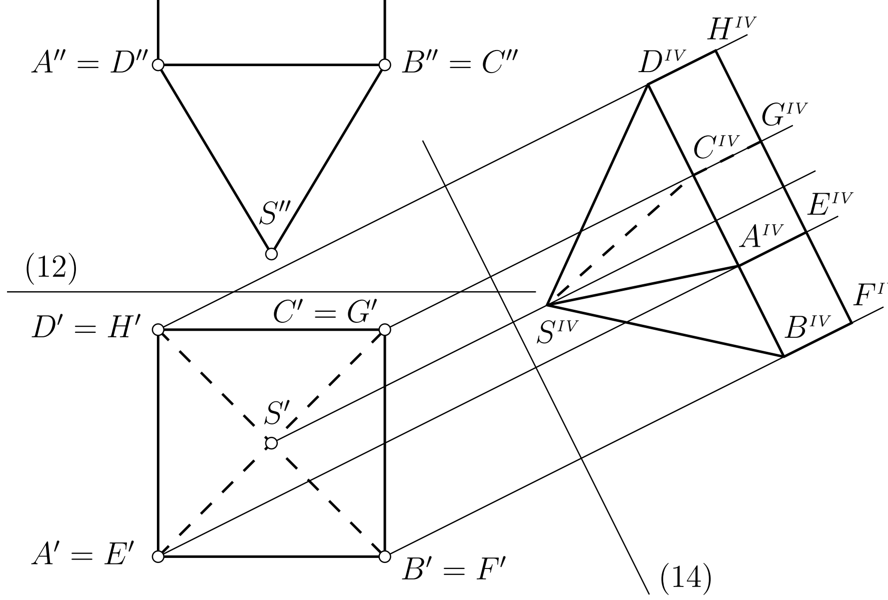
Konstruieren Sie den Seitenriss (Aufrissebene π_2 = wegfallende Rissebene).



Konstruktion

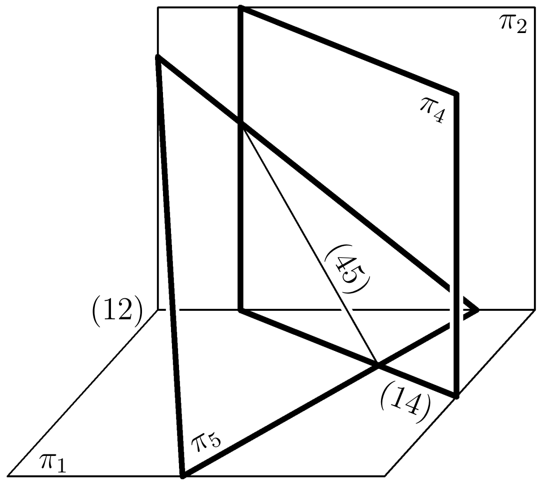
Übertrage jede Ecke des Objektes einzeln. Zur Übertragung einer Ecke benutze ihren Ordner aus dem Grundriss und den Abstand von der Rissachse aus dem Aufriss.

Lösung

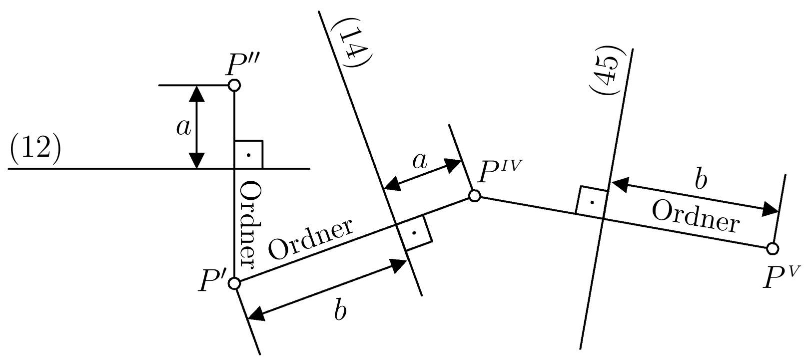


6.3 Doppelter Seitenriss

Man kann die Erstellung eines Seitenrisses auch mehrfach anwenden. Durch zweifaches Anwenden kann man jede beliebige Ebene zur Rissebene machen.



Die erste Seitenrissebene π_4 steht senkrecht zur Grundrissebene π_1 und ersetzt die alte Aufrissebene π_2. Die zweite Seitenrissebene π_5 steht auf der ersten Seitenrissebene π_4 senkrecht und ersetzt die Grundrissebene π_1.

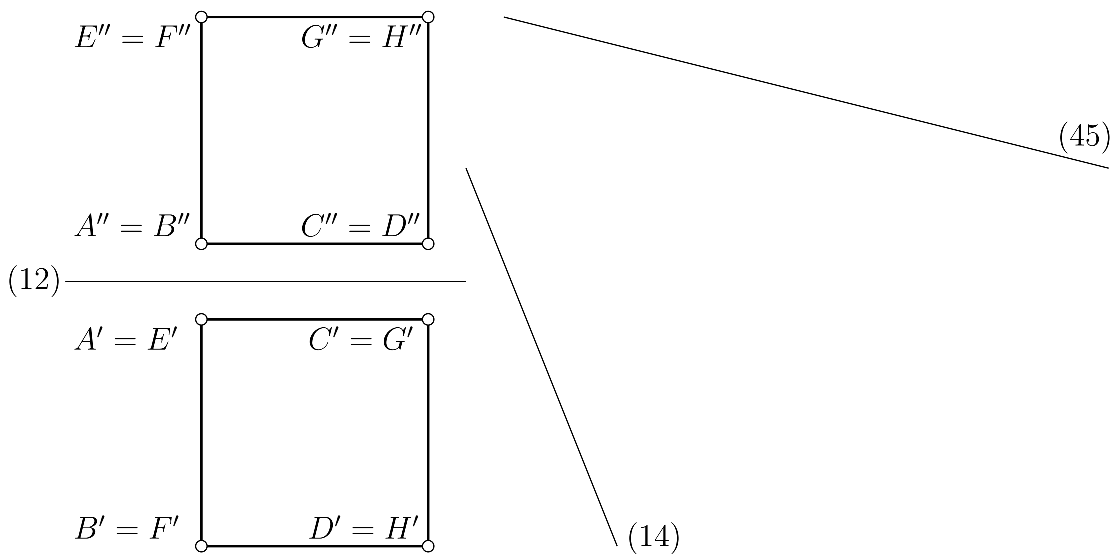


Ziele des doppelten Seitenrisses sind eine anschauliche Darstellung eines Objektes (zum Beispiel in einer gewünschten Blickrichtung) oder die Ermittlung der wahren Gestalt einer ebenen Figur.

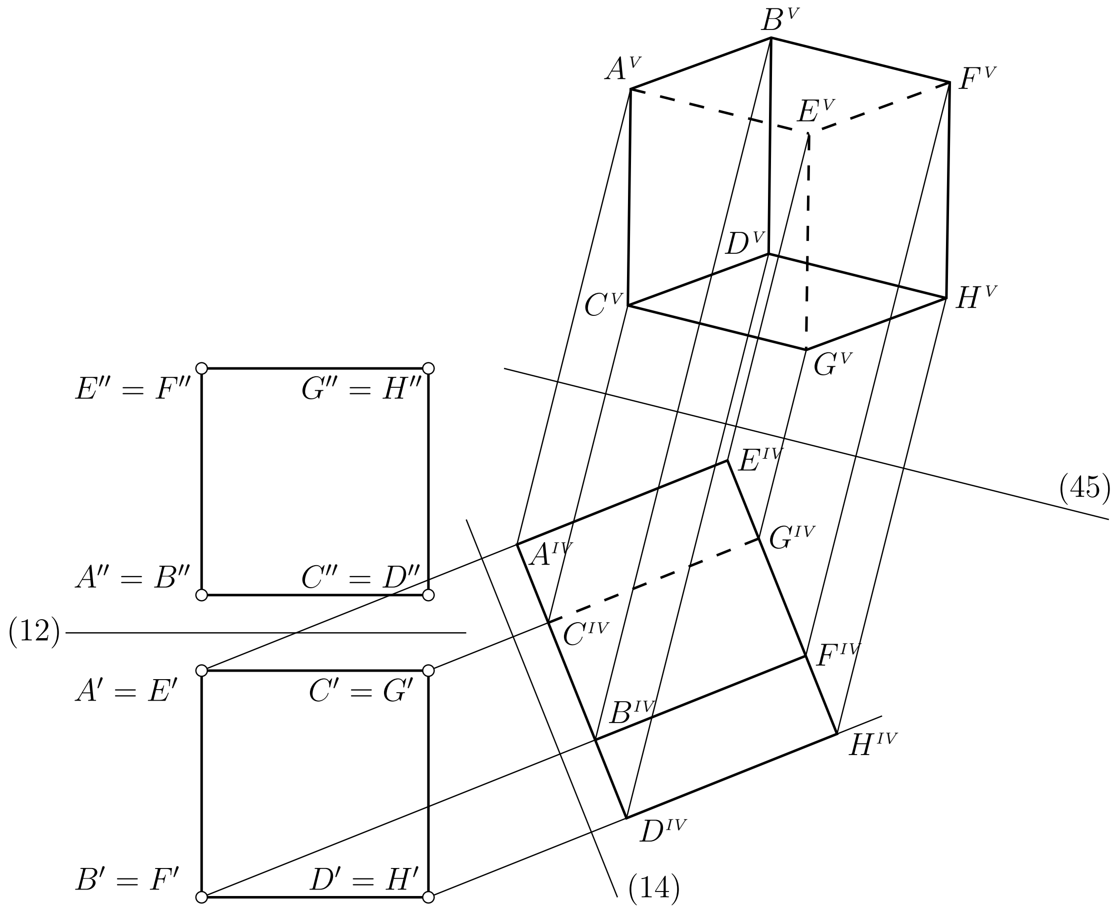
6.4 Übung: Konstruktion eines doppelten Seitenrisses

Aufgabe

Konstruieren Sie den doppelten Seitenriss des Würfels.



Lösung

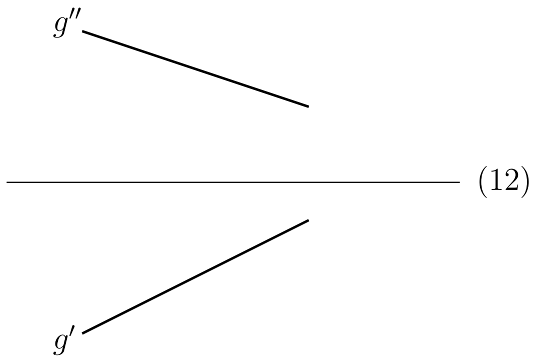

B^V
A^V
F^V
E^V
D^V
C^V
H^V
G^V
$E'' = F''$
$G'' = H''$
E^{IV}
(45)
G^{IV}
A^{IV}
$A'' = B''$
$C'' = D''$
(12)
C^{IV}
F^{IV}
$A' = E'$
$C' = G'$
B^{IV}
H^{IV}
D^{IV}
$B' = F'$
$D' = H'$
(14)

6.5 Übung: Projizierendmachen von Geraden

Erinnerung: Eine Gerade ist projizierend, wenn sie senkrecht auf einer Rissebene steht und parallel zu den anderen (Auf- und Kreuzriss) ist.

Aufgabe

Mache die Gerade g projizierend.



Konstruktion

Wähle zunächst eine Seitenrissebene π_4 parallel zu g und senkrecht zur Grundrissebene. Die Gerade g ist dann eine Frontlinie bezüglich π_4. (Der Schritt entfällt, wenn g schon eine Frontlinie ist).

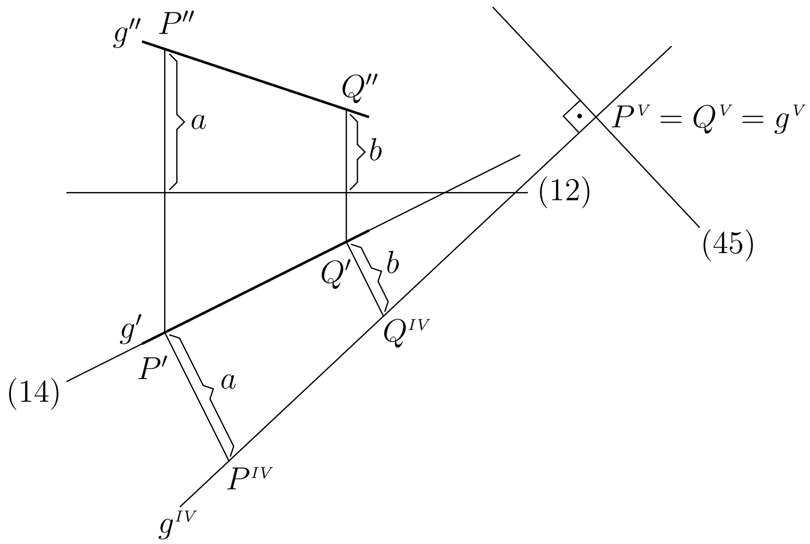
Wähle dann eine Seitenrissebene π_5 senkrecht zu g und π_4. Die Gerade g ist dann π_5-projizierend.

Im Beispiel:

- Wähle (14) parallel zu g', zum Beispiel durch $(14) = g'$.
- Konstruiere g^{IV} mittels zweier Punkte P und Q auf g.
- Wähle (45) senkrecht zu g^{IV}.
- Dann ist g^{V} ein Punkt.

Notation: π_1 = Grundrissebene; π_2 = Aufrissebene; π_3 = Kreuzrissebene; π_4 = erste Seitenrissebene; π_5 = zweite Seitenrissebene.

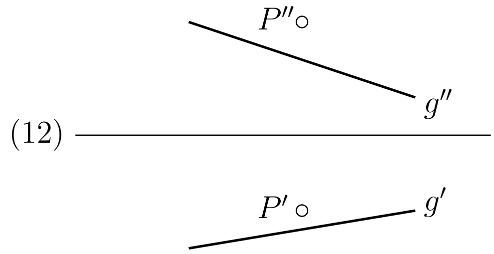
Lösung



6.6 Übung: Drehen eines Punktes um eine Achse

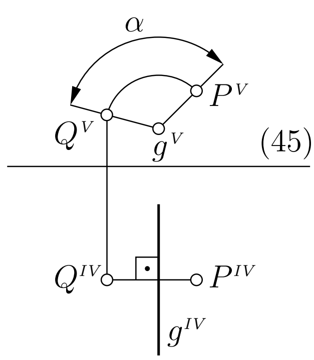
Aufgabe

Man drehe den Punkt P um 50° um die Achse g. Der gedrehte Punkt heiße Q.

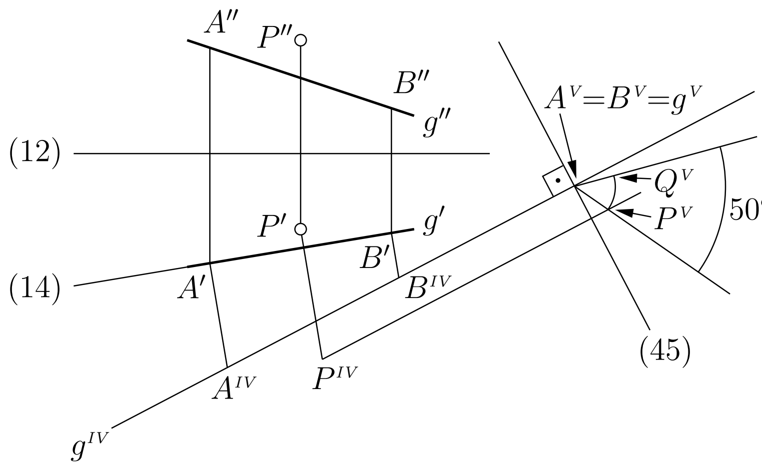


Konstruktion

Mache die Gerade g projzierend und drehe dann. Im Normalriss auf π_5 erscheint die Drehung von P unverzerrt als Drehung von P^V um den Punkt g^V. Im Seitenriss π_4 ist der Riss des Bildpunkts von Q auf der Senkrechten zu g^{IV} durch P^{IV} zu finden.



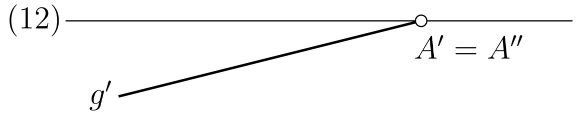
Lösung



6.7 Übung: Konstruktion einer Gerade

Aufgabe

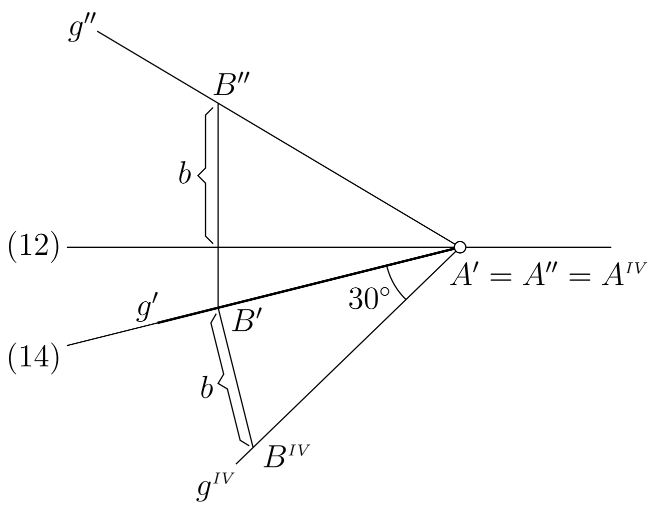
Die Gerade g enthält den Punkt A und hat gegen die Grundrissebene den Neigungswinkel 30°. Konstruiere g''.



Konstruktion

Wir konstruieren eine zu g parallele Seitenrissebene. Der Winkel von g^{IV} zur Rissachse (14) ist dann der gegebene Neigungswinkel.

Lösung

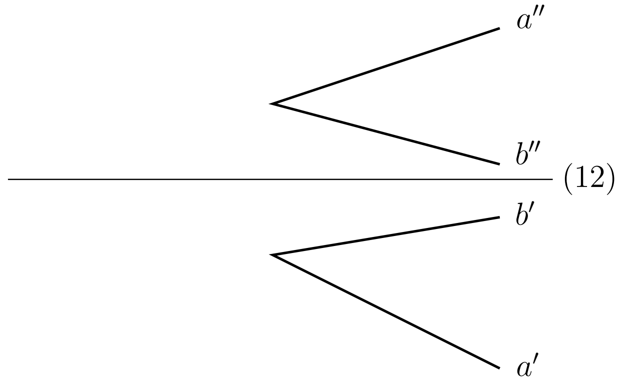


6.8 Übung: Projizierendmachen von Ebenen

Erinnerung: Eine Ebene ist projizierend, wenn sie senkrecht auf einer Rissebene steht, also ihr Riss eine Gerade ist.

Aufgabe

Eine Ebene sei durch zwei Geraden a und b gegeben. Mache die Ebene $\varepsilon = ab$ projizierend.



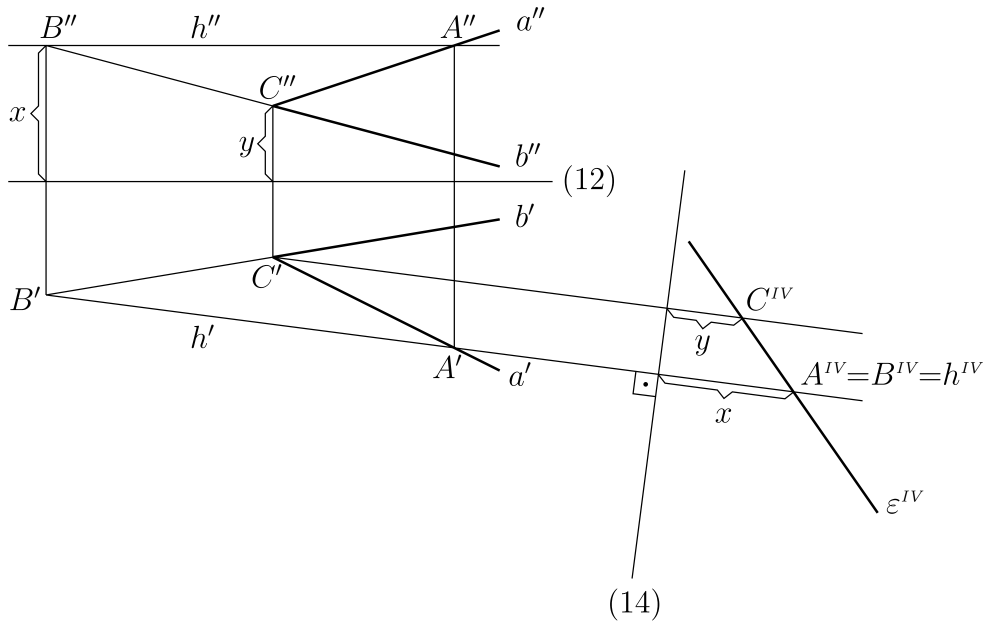
Konstruktion

Wir konstruieren zuerst eine Höhenlinie h in ε. Danach führen wir einen Seitenriss senkrecht zu h ein. Dann ist ε^{IV} eine Gerade und ε ist projizierend bezüglich der neuen Rissebene.

- Wähle h'' parallel zur Rissachse (12).
- Konstruiere h' nach Inzidenz (I).
- Wähle (14) senkrecht zu h'.

Ist g in ε enthalten, so ist $g^{IV} = \varepsilon^{IV}$ oder g^{IV} ist ein Punkt auf ε^{IV}.

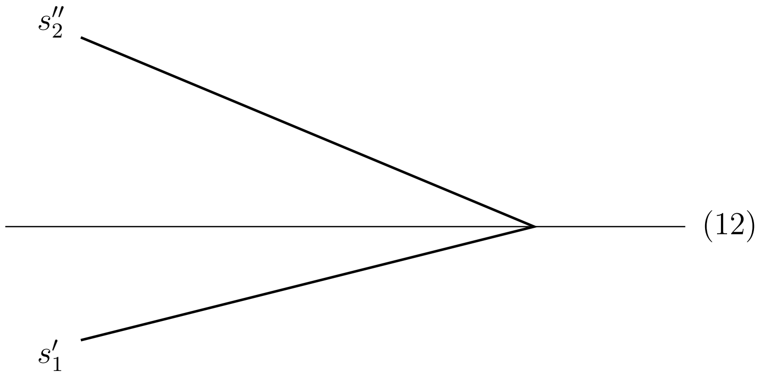
Lösung



6.9 Übung: Neigungswinkel einer Ebene

Aufgabe

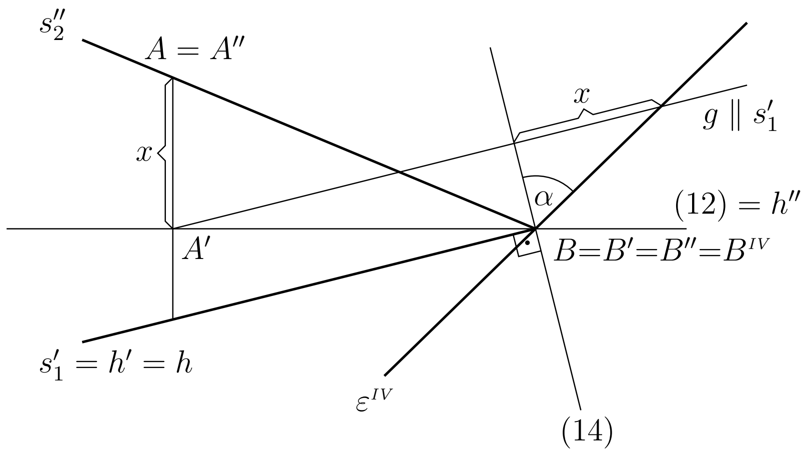
Eine Ebene ε sei durch ihre Spuren s_1 und s_2 gegeben. Bestimme den Neigungswinkel von ε gegen die Grundrissebene.



Konstruktion

Wir machen ε projizierend. Dann ist der Winkel von ε^{IV} zur Rissachse gleich dem Neigungswinkel.

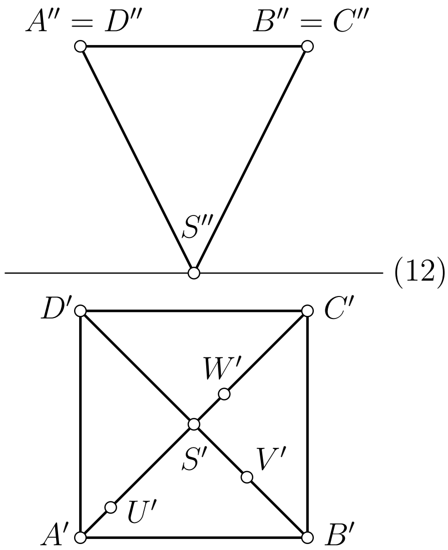
Lösung



6.10 Übung: Entzerren durch Umprojizieren (I)

Aufgabe

Konstruieren Sie die wahre Gestalt des Schnitts μ des Trichters mit der Ebene $\varepsilon = UVW$.



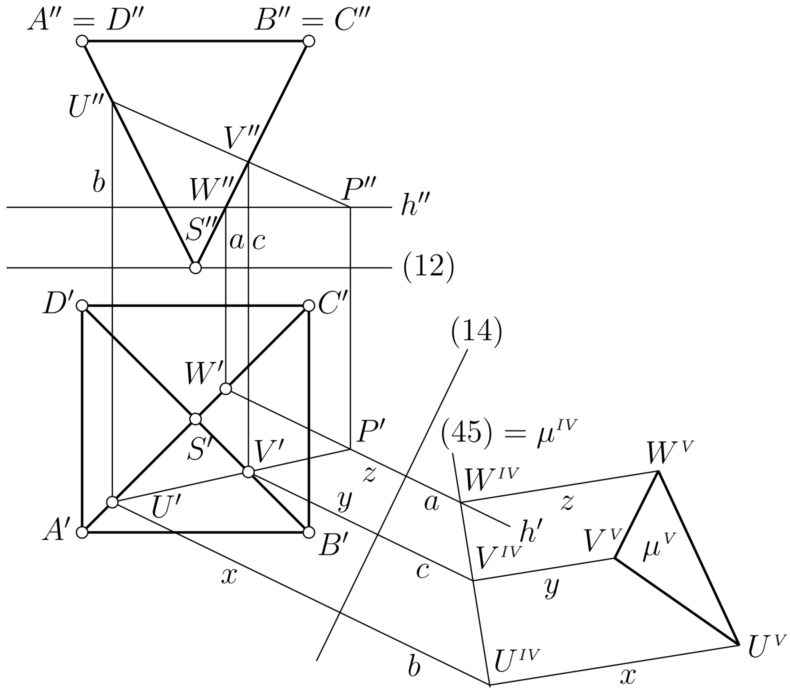
Konstruktion

Mache zuerst die Ebene ε projizierend. Dann ist ε^{IV} eine Gerade.

Dann führe einen neuen Seitenriss parallel zu ε ein. Wähle die Rissachse parallel zu ε^{IV}, zum Beispiel als $(45) = \varepsilon^{IV}$.

μ^{V} zeigt nun μ in wahrer Gestalt und Größe.

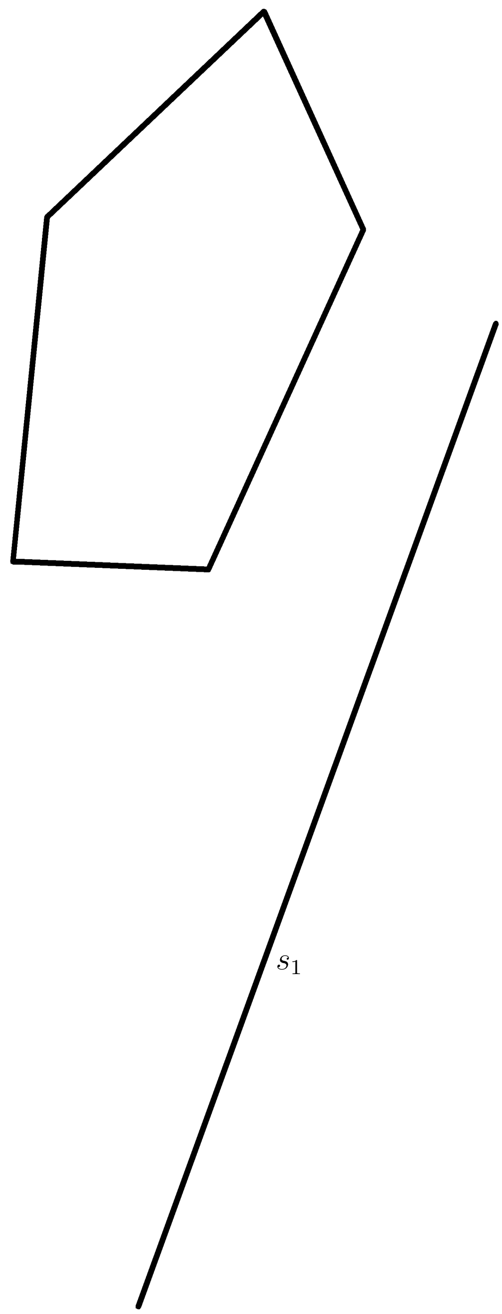
Lösung


A'' = D''
B'' = C''
U''
V''
b
W''
P''
h''
S''
a
c
(12)
D'
C'
(14)
W'
P'
(45) = μ^IV
S'
V'
W^V
z
W^IV
z
y
a
U'
h'
A'
B'
V^V
μ^V
V^IV
x
c
y
U^V
U^IV
b
x

6.11 Übung: Entzerren durch Umprojizieren (II)

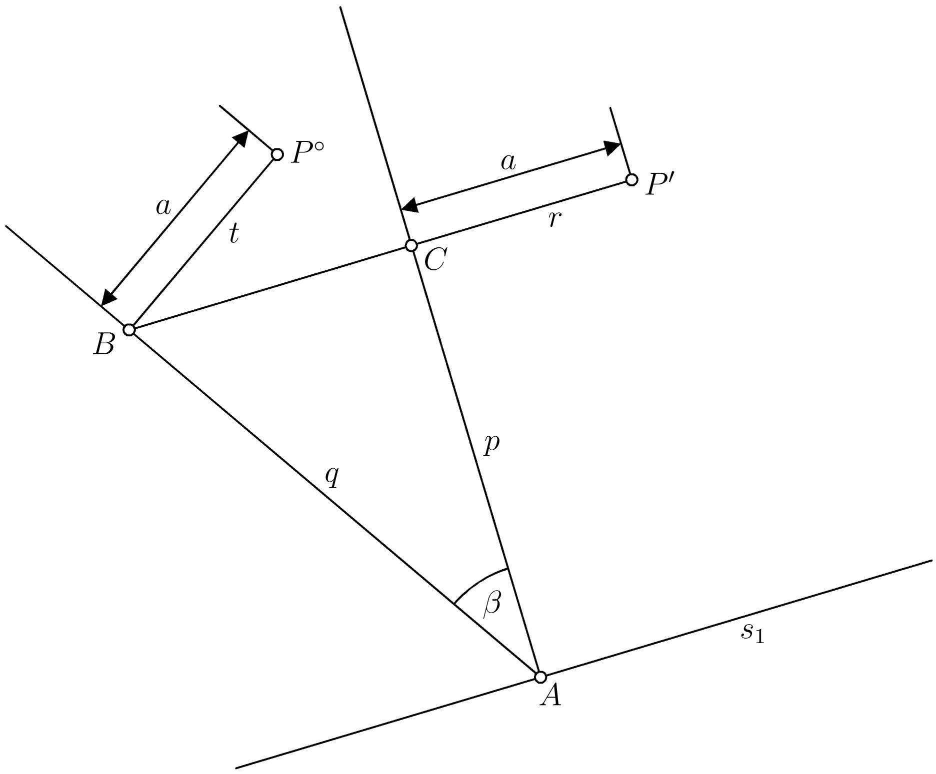
Aufgabe

Gegeben ist die Grundrissspur s_1 einer Ebene mit der Neigung 60° zur Grundrissebene und ein Fünfeck, das in dieser Ebene liegt. Konstruieren Sie die wahre Gestalt des Fünfecks.



Konstruktion

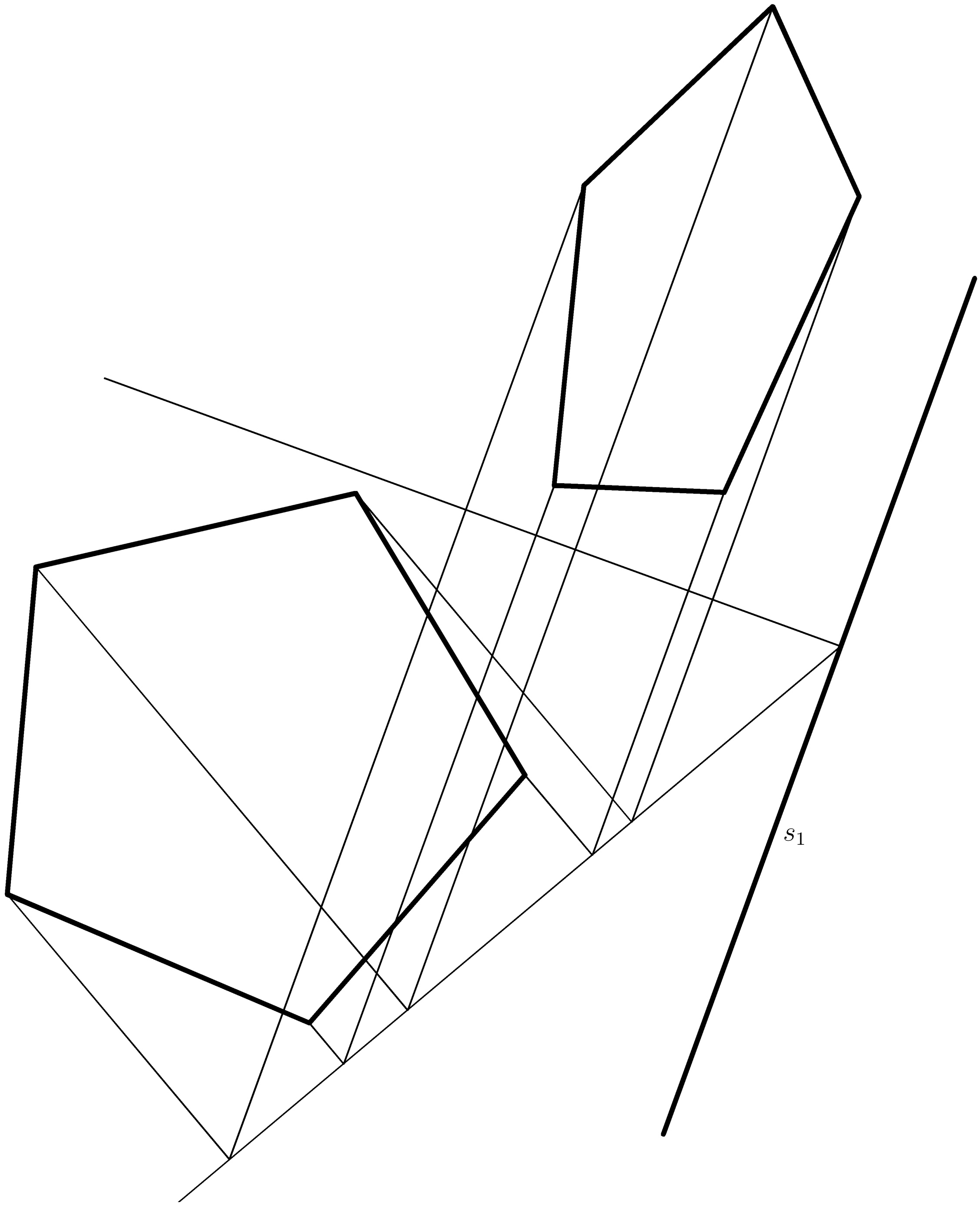
Sei P ein Punkt des Fünfecks. Wir suchen den Punkt P° in der wahren Gestalt des Fünfecks.



s_1	Grundrissspur der Ebene
A	Punkt auf s_1
p	Senkrechte zu s_1 durch A
β	Neigungswinkel der Ebene
q	Gerade durch A im Winkel β zu p
r	Senkrechte zu p durch P'
B	Schnittpunkt von q und r
t	Senkrechte zu q durch B
C	Schnittpunkt von r und p
a	Abstand von P' und C
P°	Punkt auf t im Abstand a von B

Lösung

Die Lösung der Aufgabe kann nun erreicht werden, indem jeder Eckpunkt des Fünfecks übertragen wird.

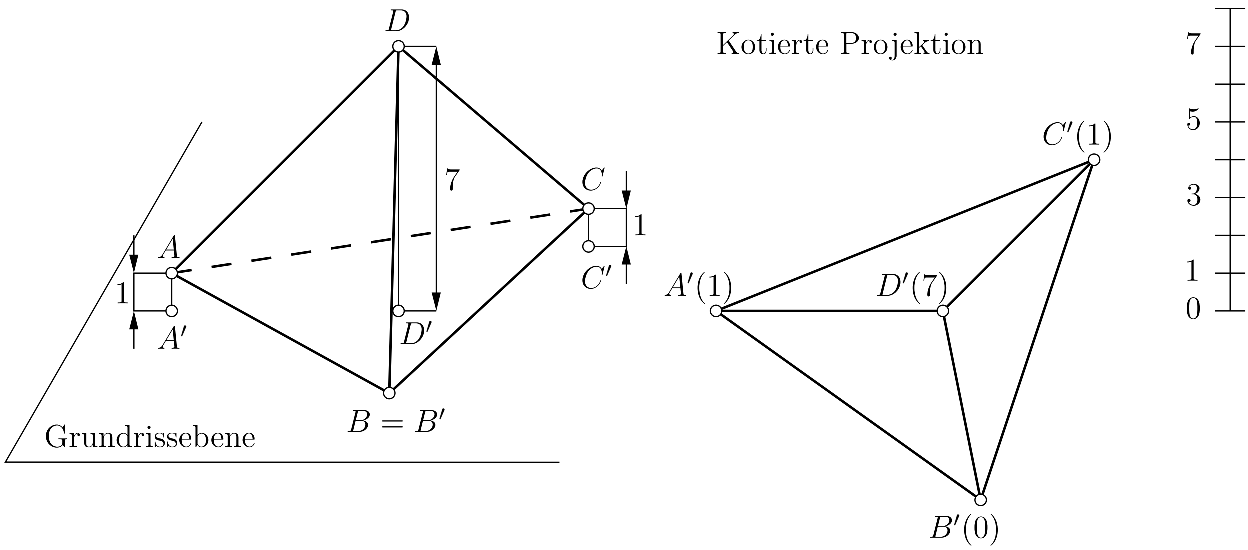


Kapitel 7

Kotierte Projektion

7.1 Die kotierte Projektion

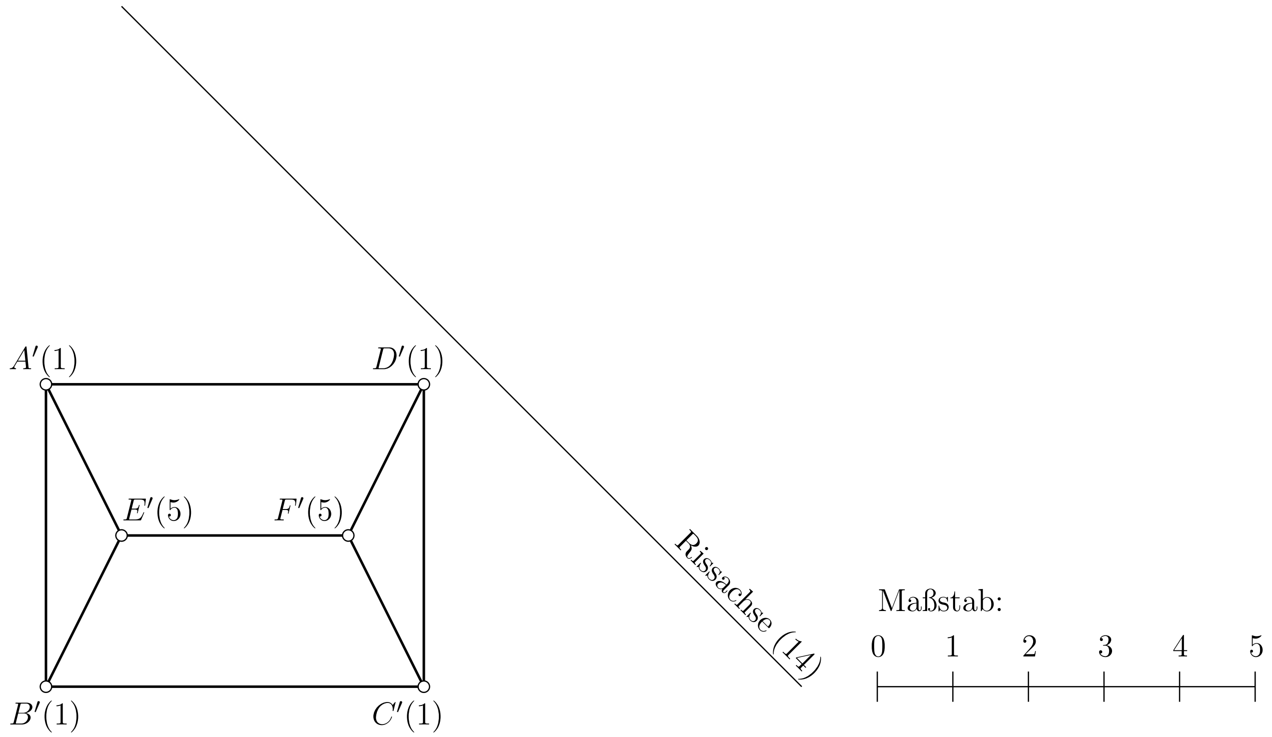
Bei der kotierten Projektion wird jeder Raumpunkt P durch seinen Grundriss P' und seine Kote, d.h. den Abstand von P zur Grundrissebene, dargestellt. Dabei wird für die Höhen immer ein Maßstab angegeben.



7.2 Übung: Konstruktion eines Seitenrisses

Aufgabe

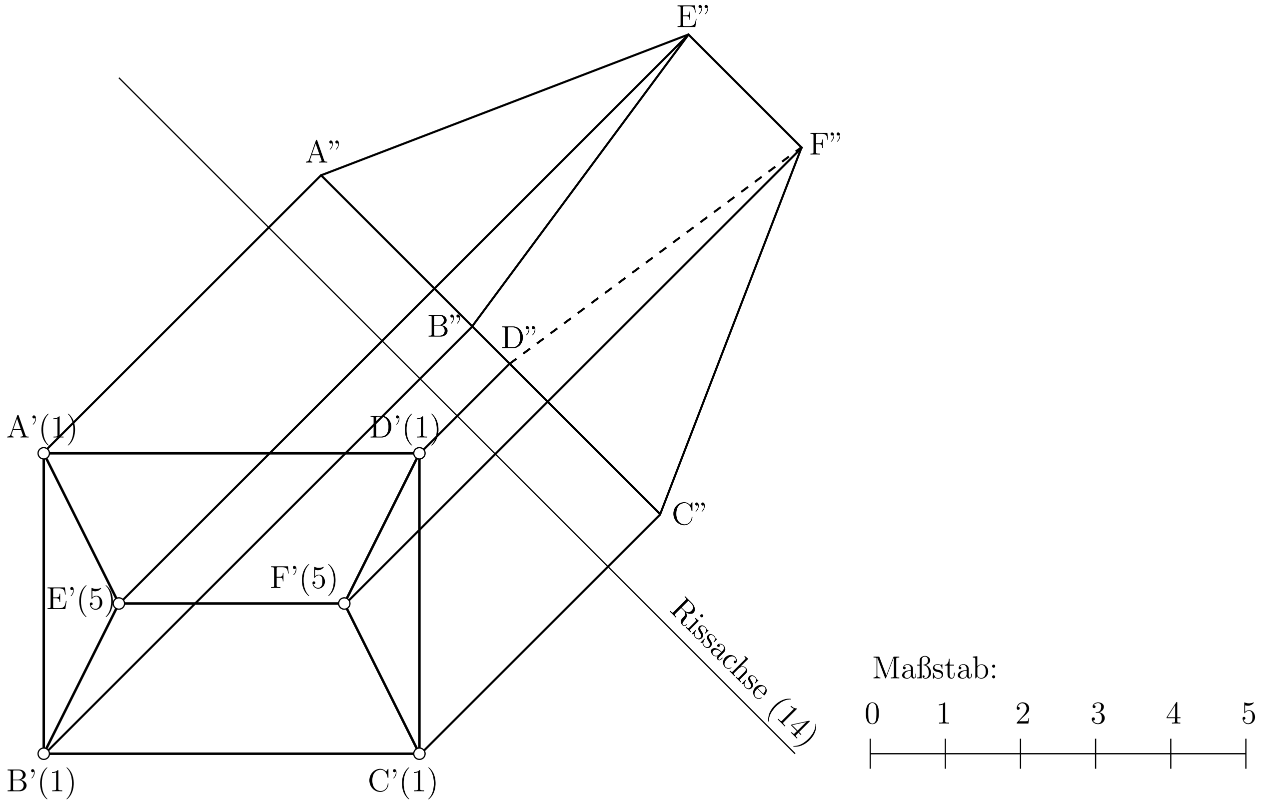
Zeichnen Sie den Seitenriss des folgenden Walmdachs.



Konstruktion

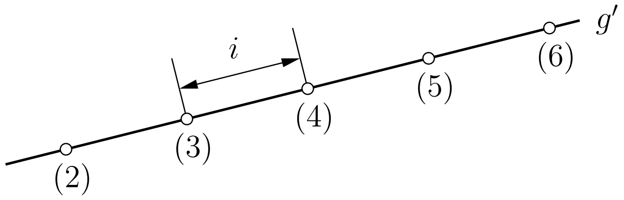
Die Kote eines Punktes P entspricht dem Abstand von P'' und der Rissachse (12) und damit auch dem Abstand von P^{IV} zur Rissachse (14). Um einen Punkt P aus der kotierten Projektion in den Seitenriss zu übertragen, kann sein Ordner benutzt werden und mit der Kote der Abstand des Bildpunktes von der Rissachse (14) ermittelt werden.

Lösung

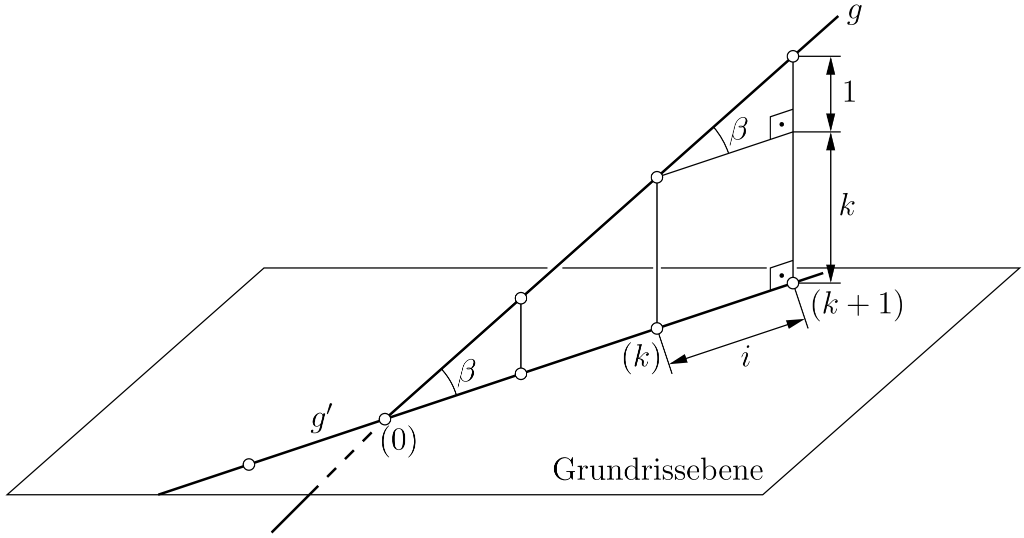


7.3 Geraden

Eine Gerade g wird in der kotierten Projektion als graduierte Gerade dargestellt:



Punkte P auf g mit ganzzahliger Kote heißen **Hauptpunkte** der Geraden g. Der Abstand zwischen den Grundrissen benachbarter Hauptpunkte heißt das **Intervall** i von g.



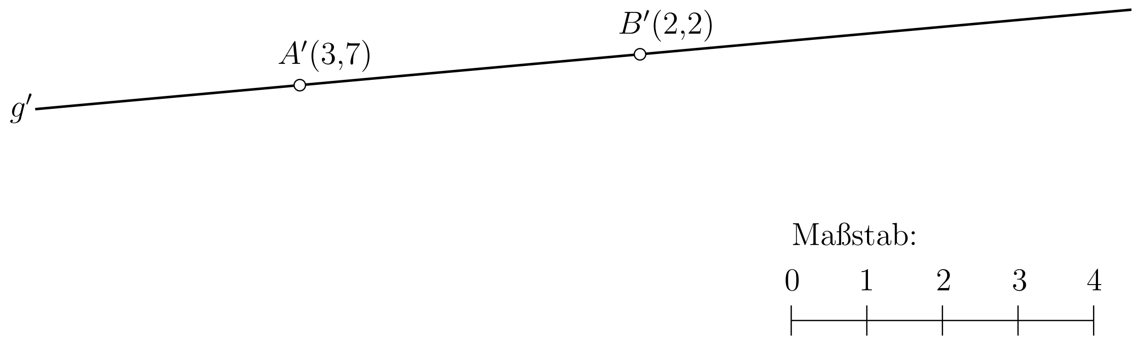
Für den Winkel β zwischen der Grundrissebene und der Geraden g gilt: $\tan\beta = 1/i$. Dieser Wert heißt auch **Anstieg, Böschung, Steigung** oder **Gefälle** von g. Gelegentlich wird der Anstieg als Prozentwert $p\%$ angegeben: $p = 100/i$. (Wegen $100/100 = 1 = \tan 45°$ entspricht einer Steigung von 100% der Winkel $\beta = 45°$.)

Erinnerung: Eine parallel zur Grundrissebene verlaufende Gerade g heißt **Höhengerade** oder **Höhenlinie**. Dafür schreibt man hier auch $g = g(z)$, wenn g in Höhe z verläuft. Ist z ganzzahlig, so heißt $g = g(z)$ **Haupthöhengerade** oder **Hauptschichtengerade**.

7.4 Übung: Konstruktion einer Graduierung

Aufgabe

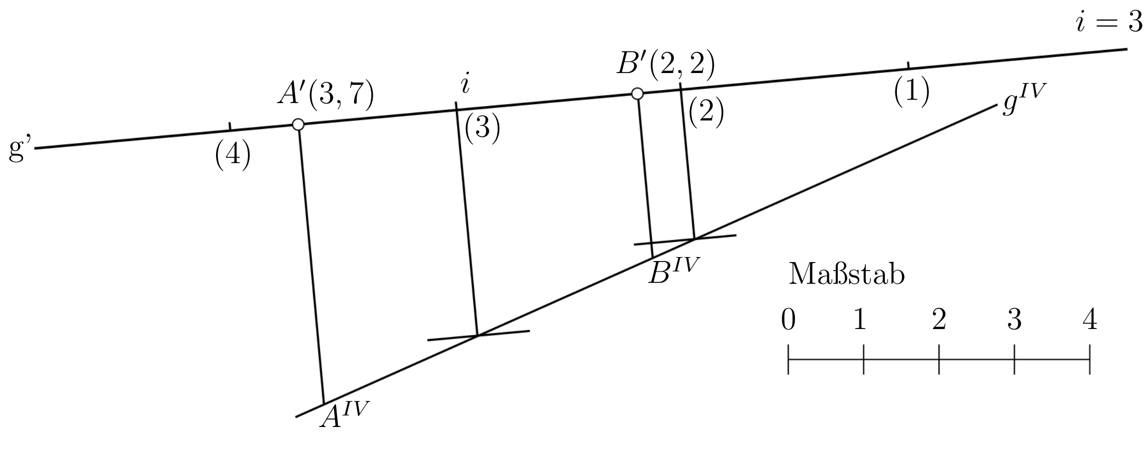
Bestimmen Sie die Graduierung der Verbindungsgeraden g der Punkte A und B.



Konstruktion

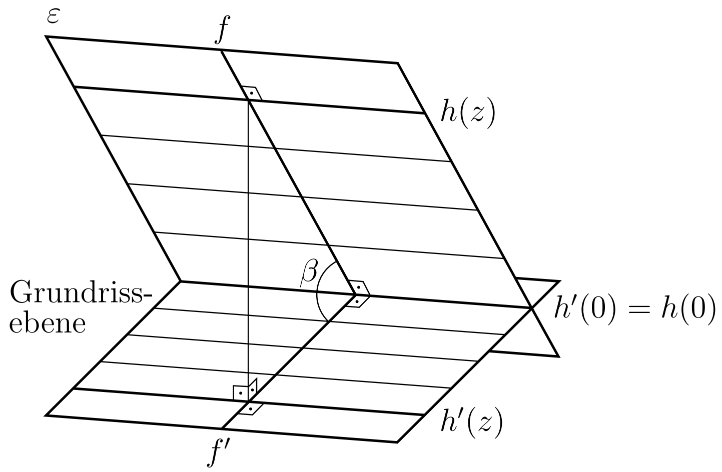
Man wähle $g' = (14)$ und konstruiere A^{IV}, B^{IV} und g^{IV}. In der Seitenrissebene können die Höhen der Gerade, insbesondere die Hauptpunkte und damit das Intervall, leicht abgelesen werden.

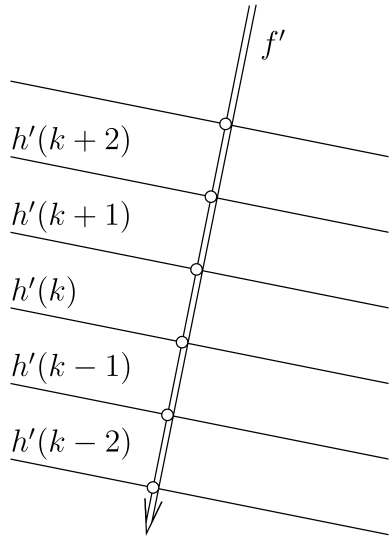
Lösung



7.5 Ebenen

Ebenen werden in der kotierten Projektion durch ihre Hauptschichtengeraden $h(z)$, $z \in \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen), dargestellt. Die resultierende Parallelschar $\{h'(z) : z \in \mathbb{Z}\}$ heißt **Hauptschichtenplan** der Ebene.





Eine **Fallgerade** f ist eine Gerade mit der stärksten Neigung gegen die Grundrissebene. Jede Fallgerade steht senkrecht auf jeder Hauptschichtengerade; dies gilt auch im Grundriss. Eine Fallgerade wird im Grundriss durch einen Doppelstrich angegeben und in Fallrichtung der Ebene orientiert.

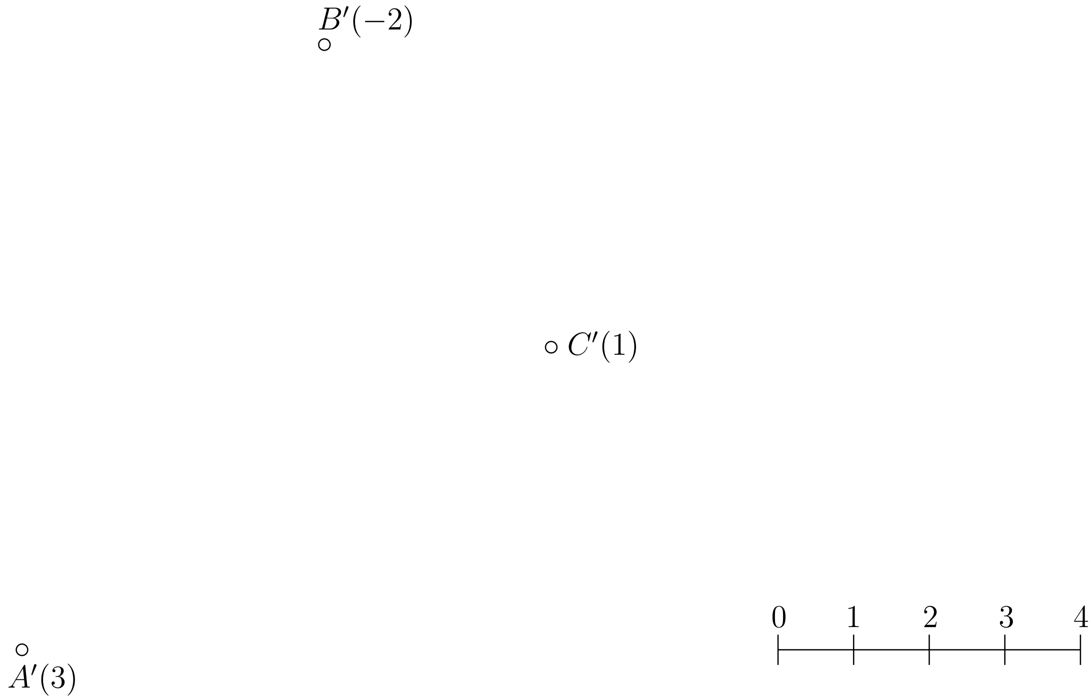
Es gilt:

- Durch eine graduierte Fallgerade ist die Ebene eindeutig bestimmt.
- Der **Anstieg** (**Böschung, Steigung**) der Ebene ist gegeben durch $\tan \beta = 1/i$. Die Zahl i heißt **Intervall** der Ebene.

7.6 Übung: Konstruktion von Ebenen

Aufgabe

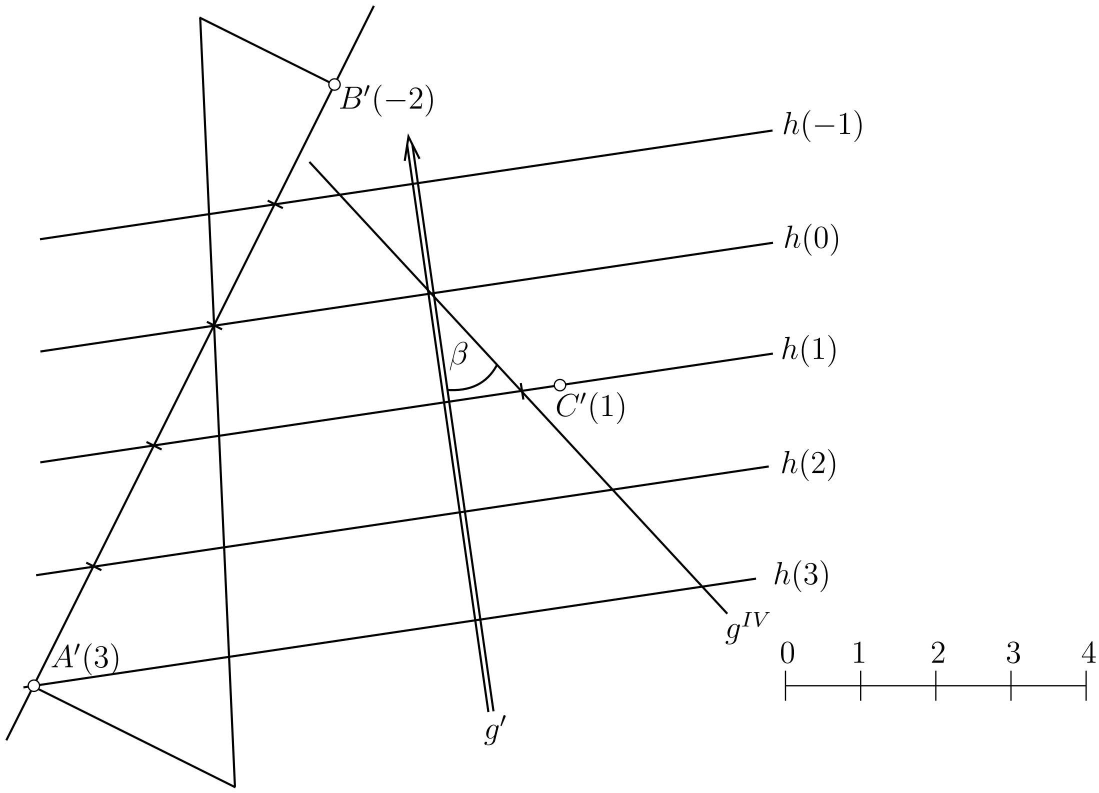
Konstruieren Sie die Ebene durch die Punkte A, B und C sowie deren Anstieg.



Konstruktion

Eine der Seiten des Dreiecks $\triangle(ABC)$ werden graduiert und damit wird der Hauptschichtenplan der Ebene bestimmt. Der Anstiegswinkel β wird in einem Seitenriss einer beliebigen Fallgeraden bestimmt.

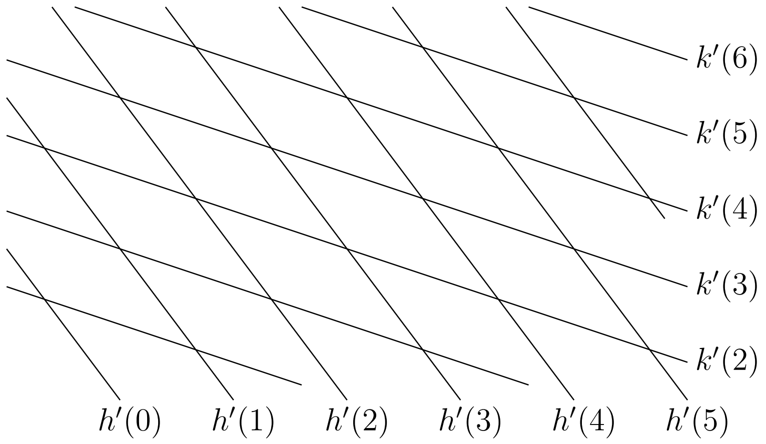
Lösung



7.7 Übung: Konstruktion von Schnittgeraden

Aufgabe

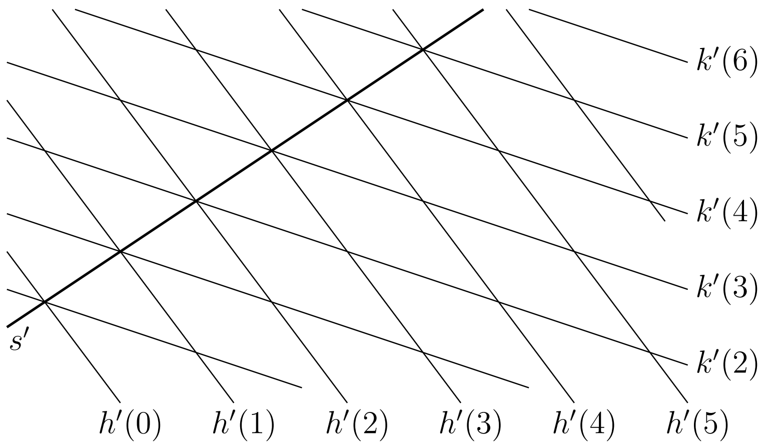
Man bestimme die Schnittgerade s der durch die Hauptschichtenpläne $\{h'(z)\}$ und $\{k'(z)\}$ gegebenen Ebenen δ und ε.



Konstruktion

Bestimme zwei Schnittpunkte von Geraden mit gleicher Kote und verbinde diese Schnittpunkte.

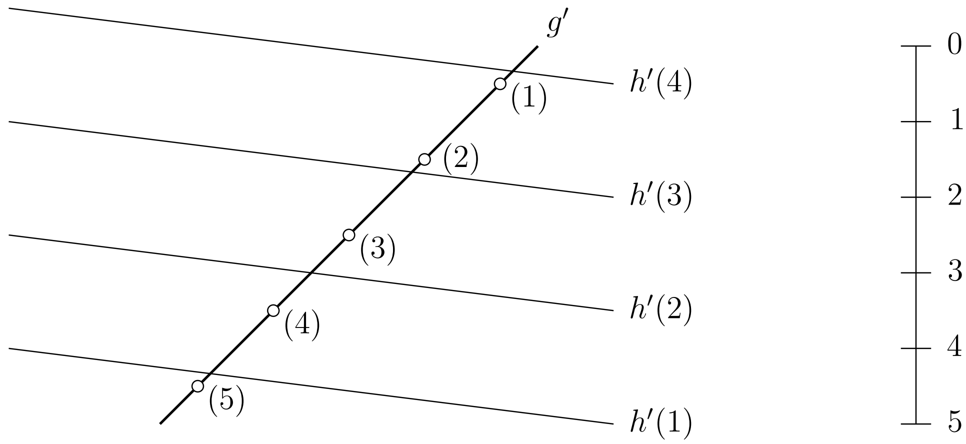
Lösung



7.8 Übung: Konstruktion von Schnittpunkten

Aufgabe

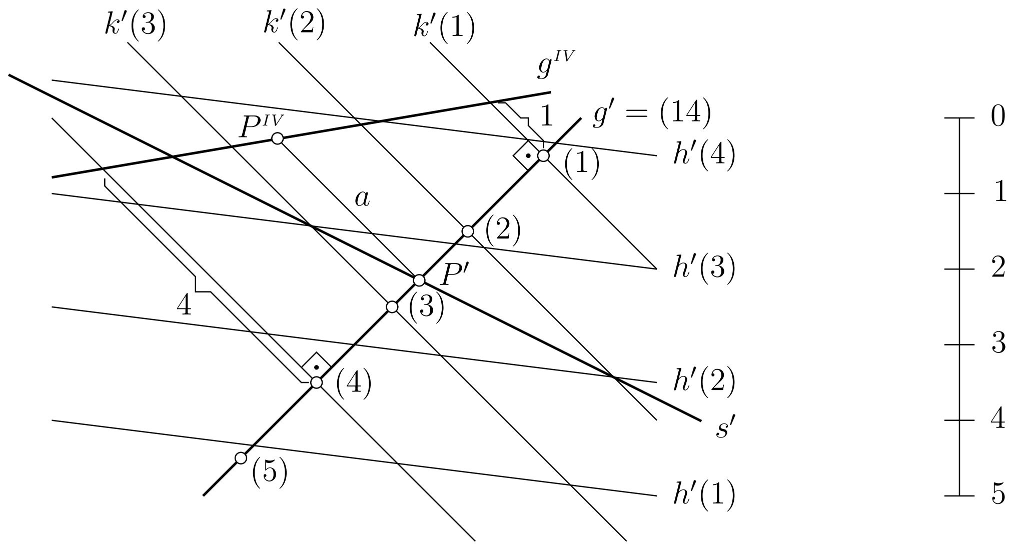
Man bestimme den Schnittpunkt P der durch den Hauptschichtenplan $\{h'(z)\}$ gegebenen Ebene ε mit der graduierten Geraden g.



Konstruktion

Lege eine Ebene μ definiert durch den Hauptschichtenplan $\{k'(z)\}$, durch g, so dass g die Fallgerade von μ ist. Bestimme die Schnittgerade s von ε mit μ. Der gesuchte Punkt liegt auf s und auf g und damit kann P' bestimmt werden.
Nun muss noch die Kote von P berechnet werden. Dazu wähle g als neue Rissachse (14) und berechne g^{IV} und P^{IV}. Nun kann die Kote von P' als Abstand a von P^{IV} und der Rissachse abgelesen werden.

Lösung



7.9 Erste Grundaufgabe

Gegeben sei eine Gerade g und zwei Zahlen i und j. Die Zahl j bestimme den Anstieg μ von g durch $\tan\mu = 1/j$. Gesucht ist eine Ebene durch g mit Anstieg β, wobei $\tan\beta = 1/i$ gelte.

Vorüberlegung

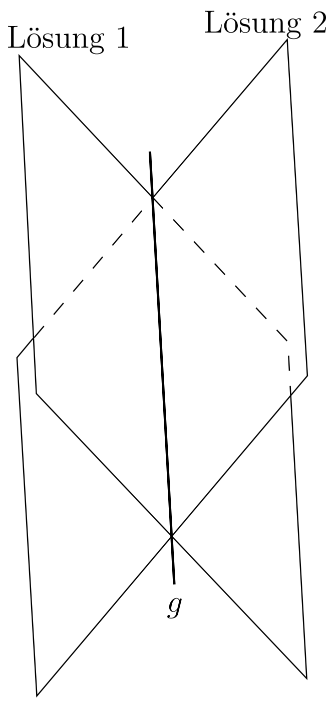
Sei ε eine Lösung der Aufgabe. Dann hat ε den Anstieg β und damit ist β die Neigung aller Fallgeraden f von ε. Also muss $\beta > \mu$ oder $\beta = \mu$ gelten, sonst hat die Aufgabe keine Lösung.

Im Fall $\beta = \mu$ ist g eine Fallgerade von ε. Daher steht der Hauptschichtenplan von ε senkrecht auf g' und kann damit leicht eingezeichnet werden. Außerdem gibt es in diesem Fall nur eine Lösung.

Im Fall $\beta > \mu$ sind genau zwei Lösungen zu erwarten, die von g aus gesehen nach verschiedenen Seiten abfallen. Ein Teil des Problems besteht darin, unter diesen Lösungen diejenige zu erkennen, die möglicherweise gewünscht wird.

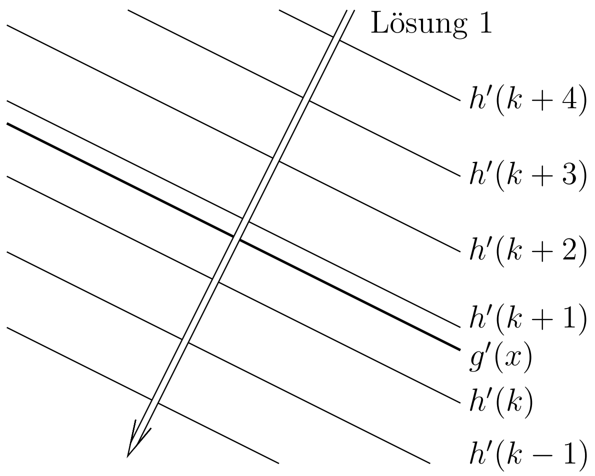
Meist benötigt man nur eine (durch g begrenzte) Hälfte der gesuchten Ebene, und es ist vorgegeben, auf welcher Seite von g' sie liegt, und ob sie gegenüber g ansteigt oder abfällt.

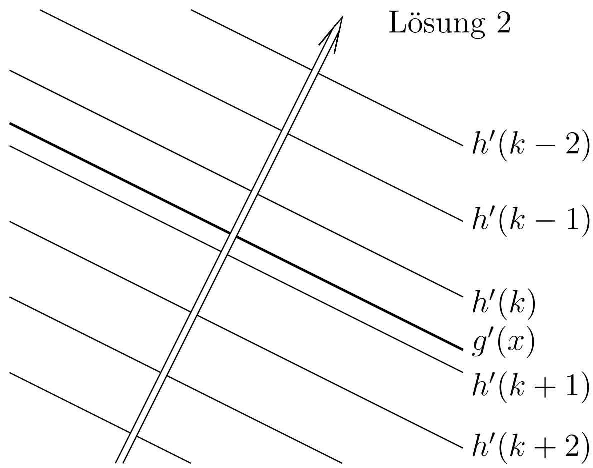
Vor Beginn der Konstruktion sollte man also feststellen, welche der beiden Lösungen gesucht wird.



Konstruktion im Fall $\beta > \mu = 0$

Im Fall $\beta > \mu = 0$ ist g eine Höhengerade und wird als $g(x)$ bezeichnet. (g ist parallel zur Grundrissebene). Dann ist der Hauptschichtenplan $\{h'(k)\}$ der gesuchten Ebene parallel zu g'. Das Intervall zwischen $h'(k)$ und $h'(k+1)$ ist gerade i. Damit kann der Schichtenplan gezeichnet werden. Beachte: Es gibt zwei Lösungen, je nachdem in welche Richtung die Ebene von g aus abfällt.





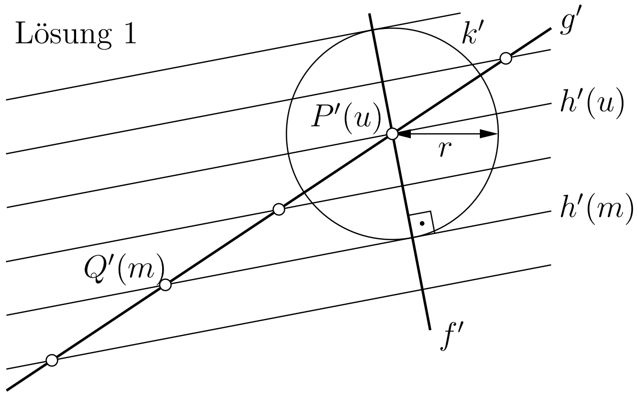
Konstruktion im Fall $\beta > \mu > 0$

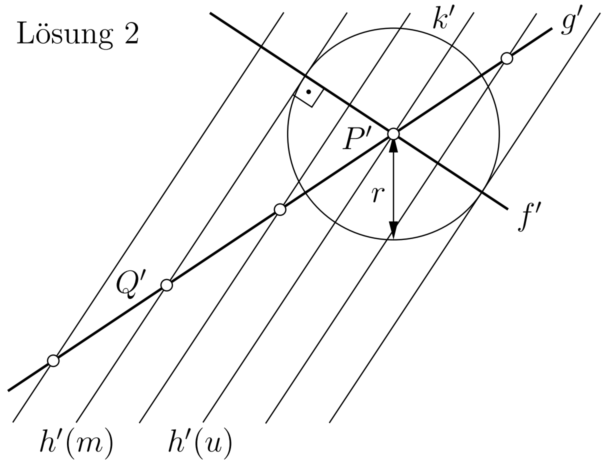
Wähle zunächst auf g zwei beliebige Punkte $P = P(u)$ und $Q = Q(m)$ mit verschiedenen Koten u und m.

Zeichne:

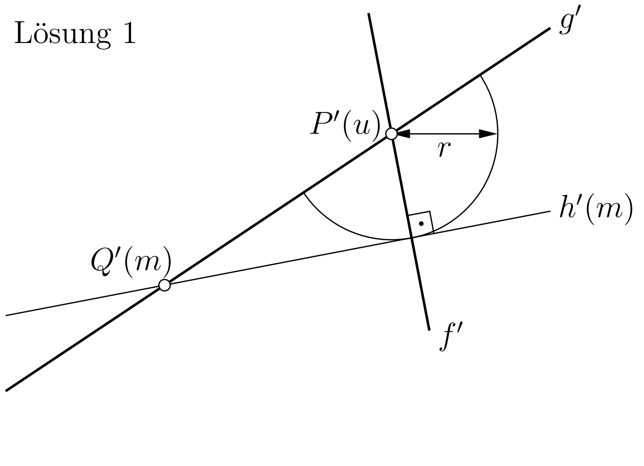
- Kreis k' um P' mit Radius $r = i|m - u|$;
- Tangente h' an k' durch Q';
- Gerade f' durch P' senkrecht zu h'.

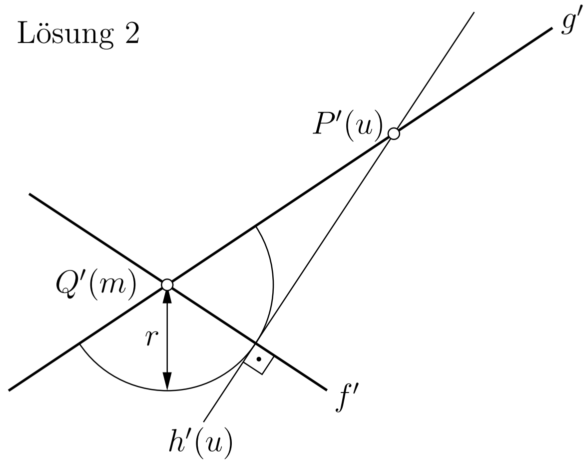
Dann ist h' der Grundriss einer Höhengerade mit Kote m, d.h. es gilt $h' = h'(m)$. Die Gerade f' ist der Grundriss einer Geraden f durch P, welche $h(m)$ schneidet. Daher hat die Ebene $gh(m)$ die Fallgerade f und ihr Anstieg ist $|m - u|/r = 1/i$. Die Ebene $gh(m)$ ist daher die gesuchte Ebene.





Variante für Halbebenen:

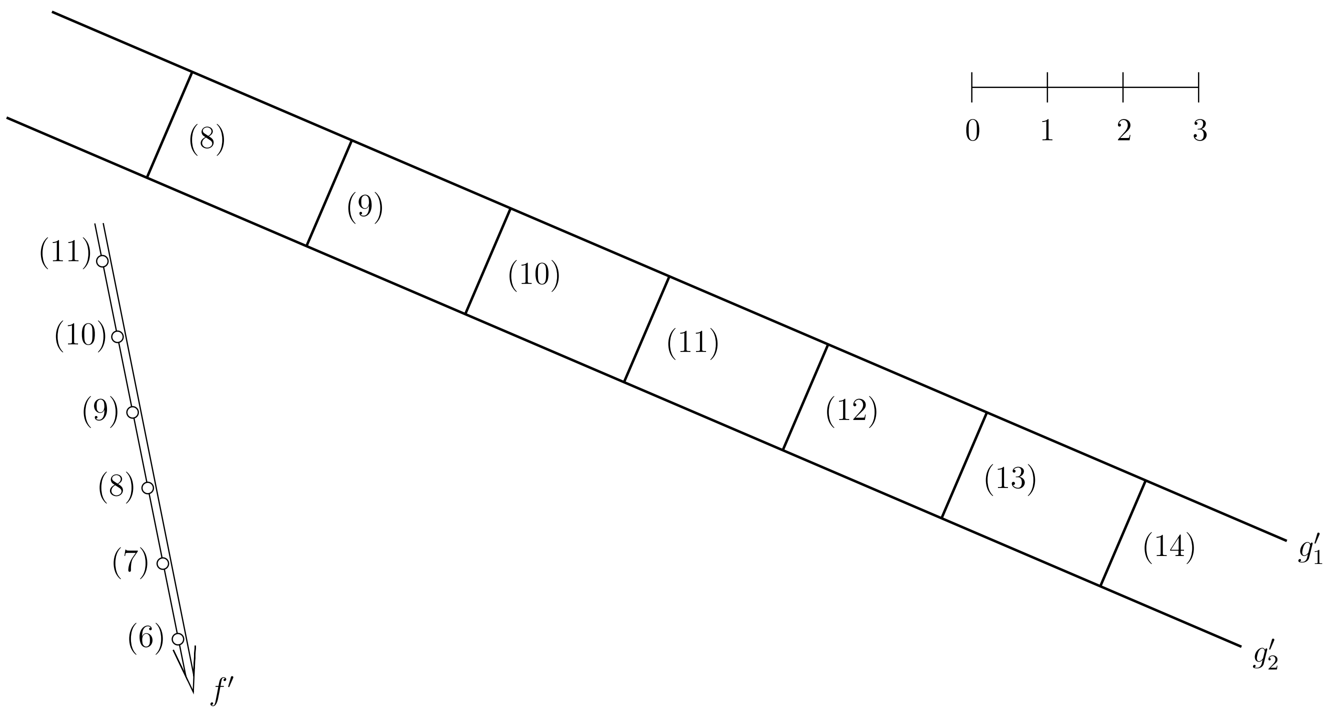




7.10 Übung: Straße abböschen

Aufgabe

Böschen Sie die ebene Straße mit den Randgeraden g_1 und g_2 gegen das ebene Gelände mit der Fallgerade f ab. Verwenden Sie das Intervall $i = 0,5$ sowohl für den Abtrag als auch für den Auftrag.



Konstruktion

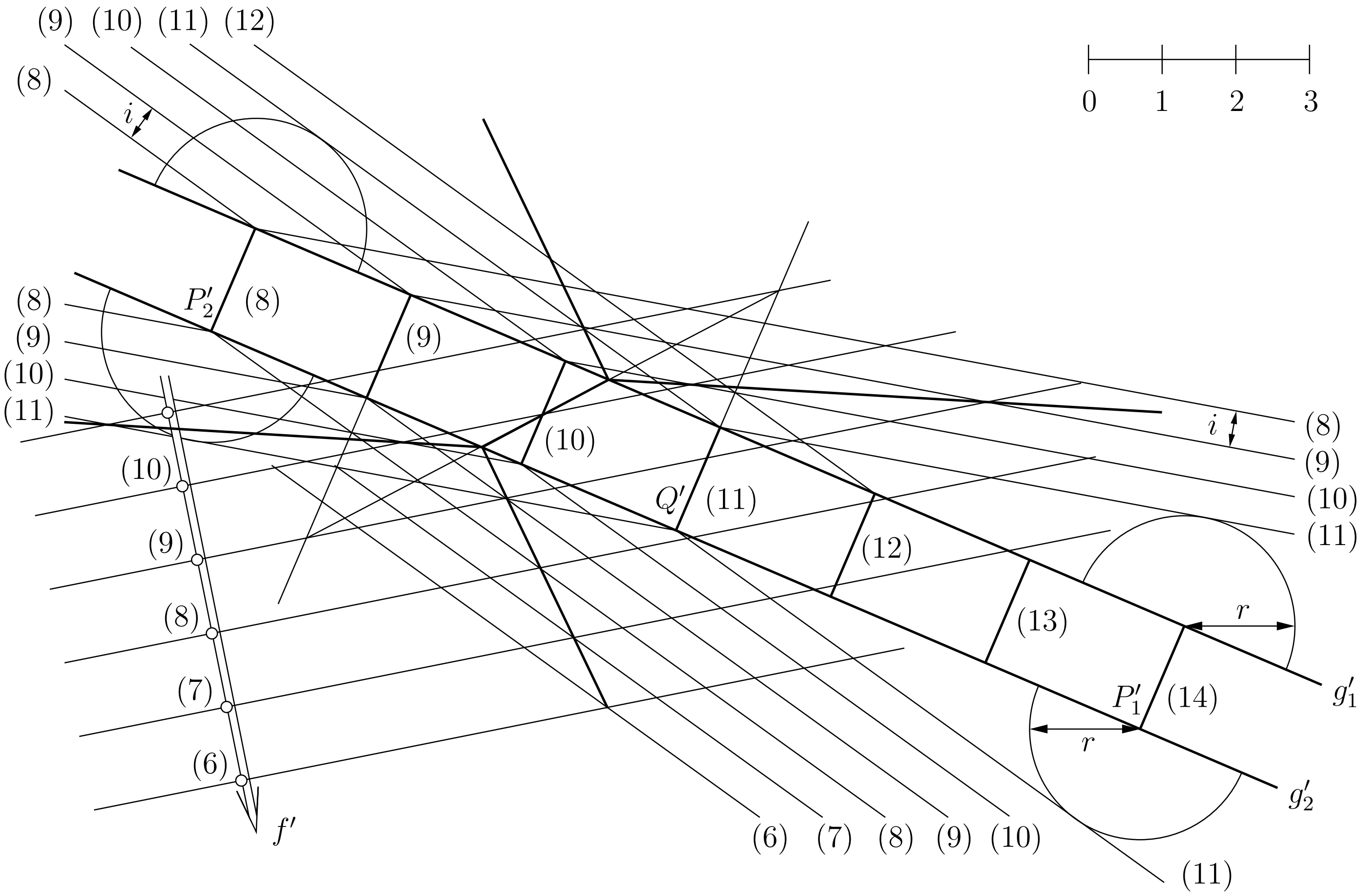
Zunächst legen wir einen Hauptschichtenplan für das Gelände an. Dieser lässt sich an der Fallgeraden f ablesen.

Dann bestimmen wir die Schnittpunkte der Straßenkante mit dem Gelände. D.h. wir bestimmen die Schnittpunkte der Geraden g_1 und g_2 mit der Gelände-Ebene.

Nun legen wir die Hauptschichtenpläne der Böschungsflächen an. Dazu müssen wir Ebenen durch g_1 und g_2 mit einem durch i gestimmten Neigungswinkel konstruieren. Das ist also eine Anwendung der ersten Grundaufgabe.

Nun müssen wir noch die Böschungsebenen mit der Geländeebene schneiden, um den Plan zu vervollständigen. Dazu müssen wir jeweils den Schnitt zwischen zwei Ebenen ermitteln.

Lösung



7.11 Zweite Grundaufgabe

Aufgabe

Gegeben sei eine Ebene ε mit Anstieg $\tan\beta = 1/i$, ein Punkt P dieser Ebene sowie der Anstieg $\tan\mu = 1/j$. Konstruiere alle Geraden g durch den Punkt P, die in ε enthalten sind und deren Anstieg $1/j$ beträgt.

Konstruktion

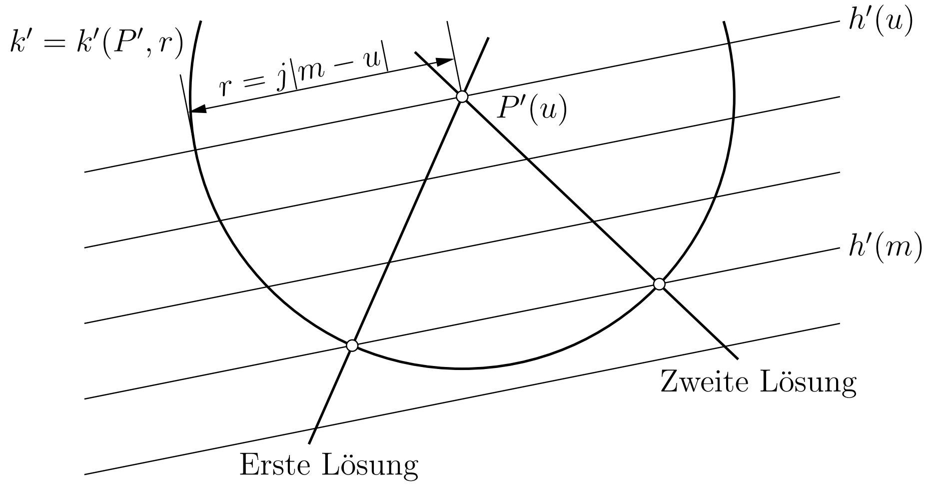
Sei $\{h'(z)\}$ der Schichtenplan von ε und sei P gegeben als $P'(u)$.

Man wähle eine Kote m verschieden von u. Jede der gesuchten Geraden g schneidet die Höhenschichtenlinie $h(m)$ von ε in einem Punkt Q.

Ist r der Abstand von P' und Q', so hat g den Anstieg $|m-u|/r$. Also müssen wir Q' auf einem Kreis um P' mit Radius $r = j|m-u|$ suchen.

Für $\mu < \beta$ gibt es zwei, für $\mu = \beta$ eine und für $\mu > \beta$ keine Lösungen.

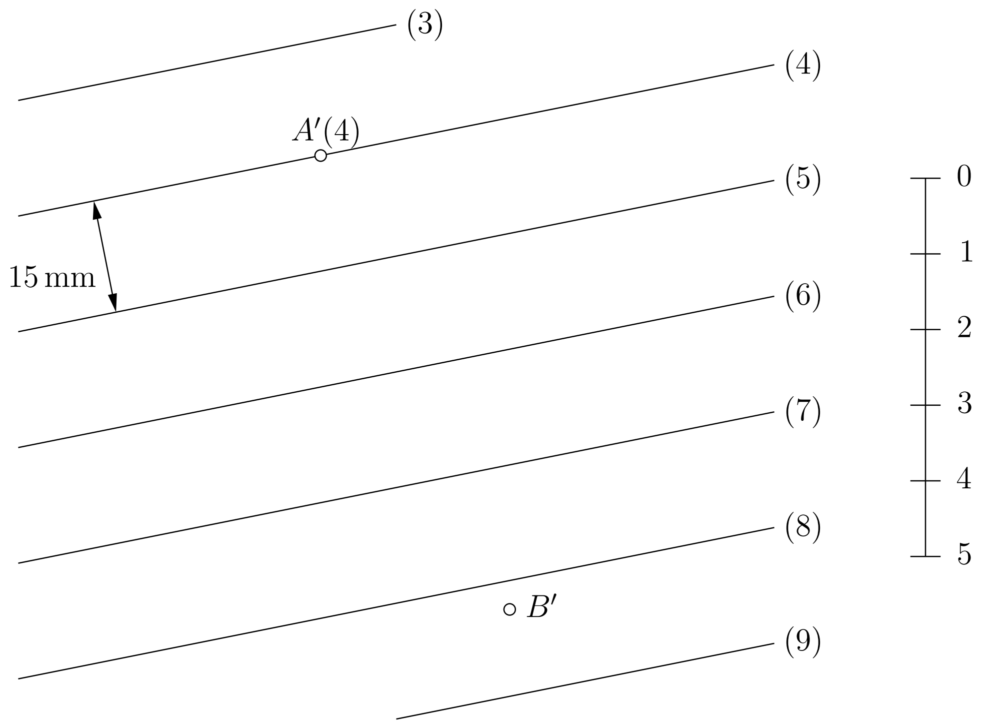
Lösung



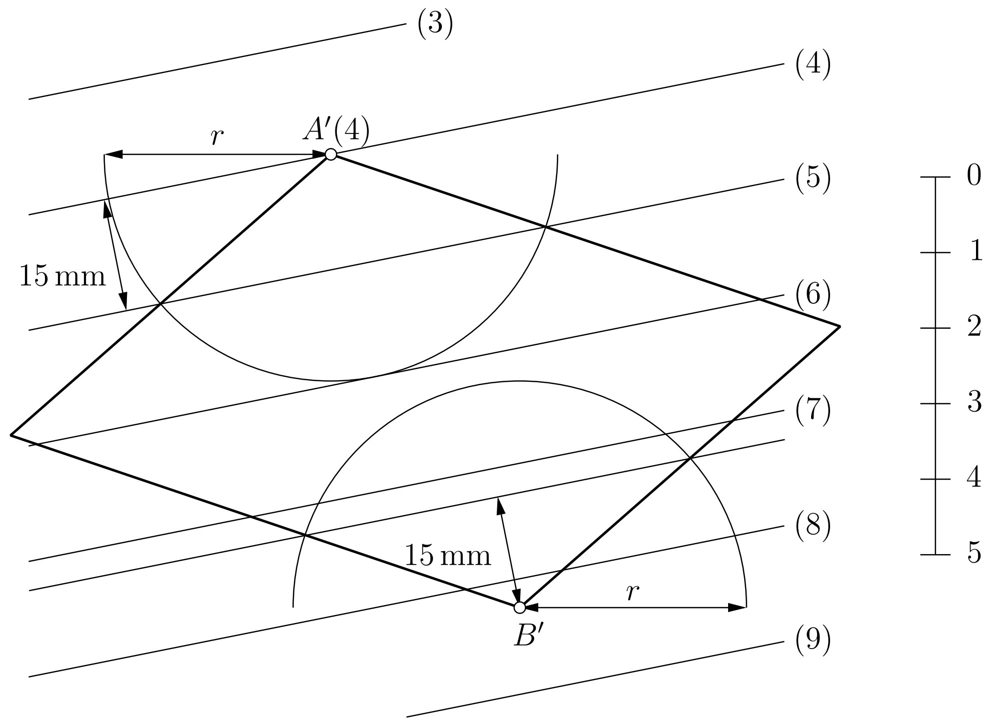
7.12 Übung: Konstruktion einer Serpentine

Aufgabe

Vorgelegt ist eine Ebene durch ihre Graduierung $\{h'(u)\}$ sowie zwei Punkte A, B dieser Ebene. Gesucht ist ein Weg („Serpentine“) mit halbem Anstieg auf der Ebene, der von A nach B führt.



Lösung

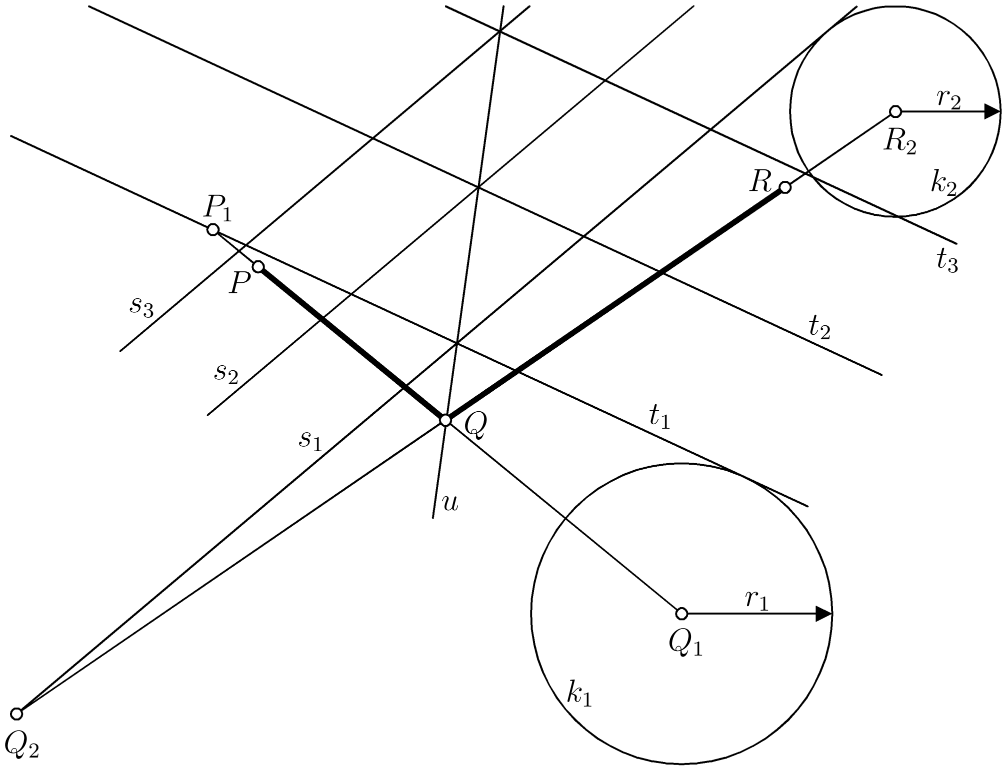


7.13 Dritte Grundaufgabe

Aufgabe

Gegeben seien drei Punkte P, Q und R mit Höhenangabe und Anstiege m und n der Ebenen μ und ν. Gesucht sind die Haupthöhengeraden $t_1, t_2, \ldots$ der Ebene μ mit $PQ \subseteq \mu$, die Haupthöhengeraden $s_1, s_2, \ldots$ der Ebene ν mit $QR \subseteq \nu$ und die Schnittgerade u von μ und ν.

Lösung



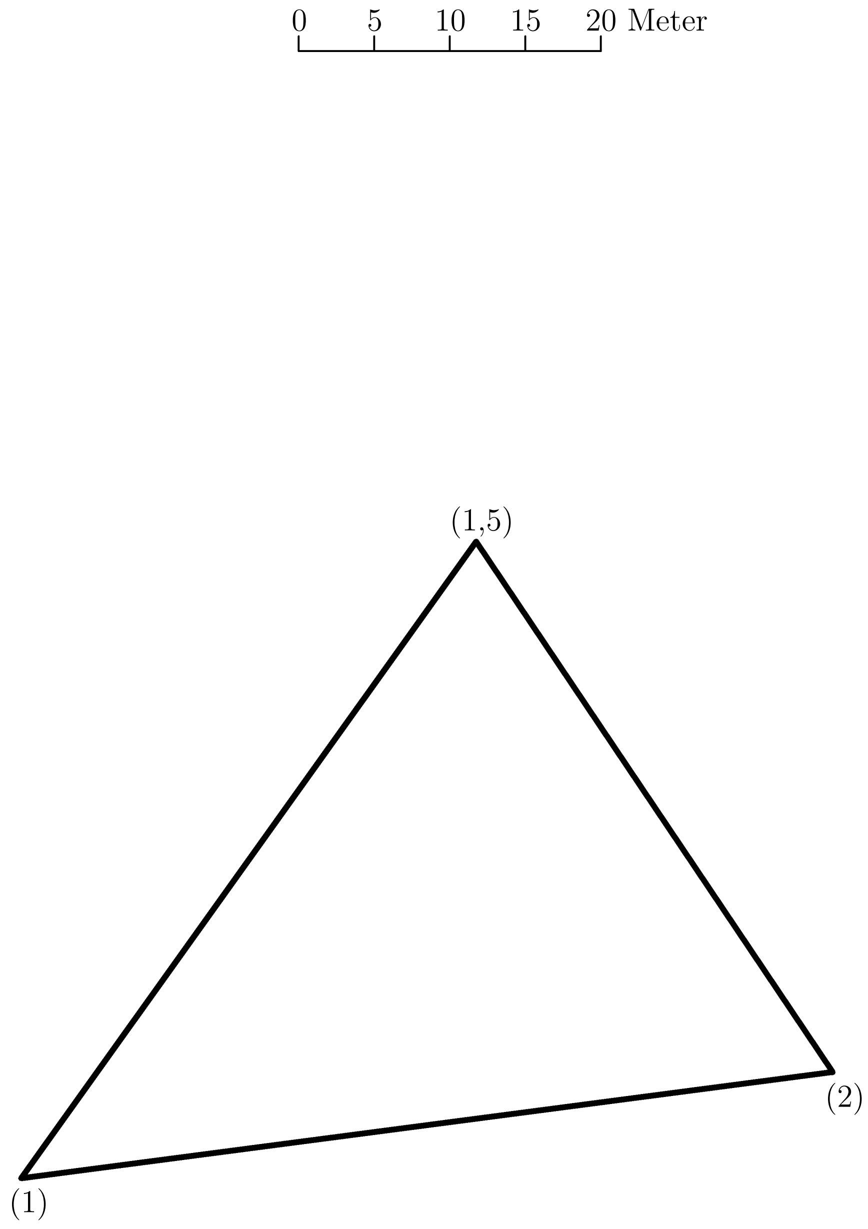
P_1, Q_1	Punkte auf PQ mit ganzzahliger Höhe
r_1	Intervall von $\mu = 1/m$ (Maßstab beachten)
k_1	Kreis um Q_1 mit Radius r_1
t_1	Tangente an k_1 durch P_1
s_2, s_3, ...	Parallele zu s_1 jeweils im Abstand r_1
Q_2, R_2	Punkte auf QR mit ganzzahliger Höhe
r_2	Intervall von $\nu = 1/n$ (Maßstab beachten)
k_2	Kreis um R_2 mit Radius r_2
s_1	Tangente an k_2 durch Q_2
t_2, t_3, ...	Parallele zu t_1 jeweils im Abstand r_2
u	Gerade durch Q und die Schnittpunkte der Haupthöhenlinien mit jeweils gleicher Höhe

Der Kreis k_1 kann auch um P_1 geschlagen werden. Die Tangente t_1 verläuft dann durch Q_1 (analog für k_2). Welche der jeweils beiden möglichen Tangenten ausgewählt wird, hängt von der Richtung des Anstiegs der Ebenen ab.

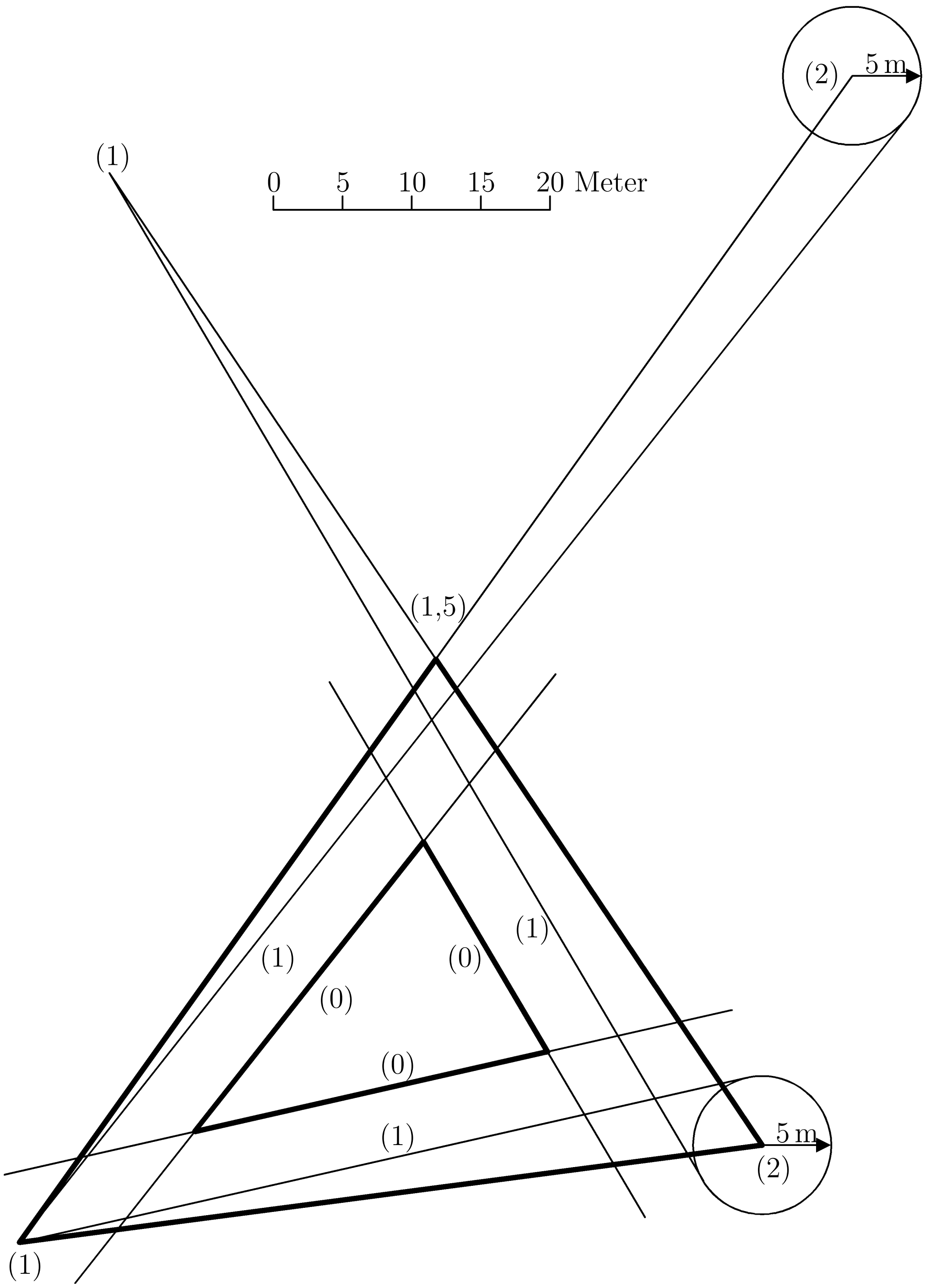
7.14 Übung: Teich anlegen

Aufgabe

In schrägem Gelände soll ein Teich angelegt werden. Das Ufer mit dem Gefälle 1:5 beginnt innerhalb des Dreiecks. An den Ecken des Dreiecks ist die Höhe des Geländes über der Wasseroberfläche angegeben. Wo befindet sich die Wasserlinie?



Lösung



Kapitel 8

Bezeichnungen

- *Punkte* werden mit lateinischen Großbuchstaben bezeichnet, zum Beispiel: $P, Q, P_3, Q_7', \ldots$
- *Geraden* und *krumme Linien* werden mit lateinischen Kleinbuchstaben bezeichnet. Zum Beispiel: $g, h, u_9''', \ldots$; Längen haben die gleiche Bezeichnung.
- *Ebenen* und *ebene Figuren* sowie *Winkel* werden mit griechischen Kleinbuchstaben bezeichnet, zum Beispiel: $\alpha, \beta, \gamma_4'', \ldots$.
- *Krumme Flächen* werden mit griechischen Großbuchstaben bezeichnet, zum Beispiel: $\Gamma, \Omega_5', \ldots$

- $\in$: zum Beispiel $P \in g$: Der Punkt P liegt auf der Geraden g.
- $\subseteq$: zum Beispiel $g \subseteq \pi$: Die Gerade g ist in der Ebene π enthalten.
- $\|$: zum Beispiel $g \parallel \pi$: Die Gerade g ist parallel zur Ebene π.
- $\perp$: zum Beispiel $g \perp h$: Die Gerade g steht senkrecht auf der Geraden h.
- $\cap$: zum Beispiel $g \cap h$: Schnittpunkt der Geraden g und h oder die leere Menge, falls g und h sich nicht schneiden.
- *Verneinungen*: $\notin, \not\subseteq, \nparallel, \not\perp$.

- PQ: *Verbindungsgerade* von P und Q.
- $\overline{PQ}$: (Länge der) *Verbindungsstrecke* zwischen P und Q.
- Pg: *Verbindungsebene* des Punktes P und der Geraden g.
- gh: *Verbindungsebene* der Geraden g und h (falls diese existiert).
- PQR: *Verbindungsebene* der Punkte P, Q und R (falls P, Q und R nicht kollinear)
- $\triangle(ABC)$: *Dreieck* mit Eckpunkten A, B, C.
- $k(M, r)$: *Kreis* um Mittelpunkt M mit Radius r.
- $k(M, P)$: *Kreis* um Mittelpunkt M durch Punkt P.
- $\parallel (P, g)$: *Parallele* zu g durch P.
- $\perp (P, g)$: *Senkrechte* auf g durch P.
- $\parallel (P, \varepsilon)$: Ebene *parallel* zu ε durch P.
- $\sphericalangle(g, h)$: *Winkel* zwischen g und h.
- $\sphericalangle(g, \varepsilon)$: *Winkel* zwischen Gerade g und Ebene ε.

- $abst(\cdot, \cdot)$: *Abstand* zwischen zwei Objekten (Punkt, Gerade, Ebene, ...).
- $dreh(P, h)$: *Drehung* eines Punktes P um eine Gerade h.
- $ord(P)$: *Ordner* des Punktes P.
- $paff\,(P; a, X, X')$: *perspektive Affinität* von P bzgl. Affinitätsachse a und affin zugeordnetem Punktepaar X, X'.

Kapitel 9

Literatur

[1] G. Bär: *Geometrie*, 2. Aufl. Teubner, Stuttgart, 2001.

[2] R. Fucke, K. Kirch, H. Nickel: *Darstellende Geometrie für Ingenieure*, 16. Aufl. Fachbuchverlag, Leipzig, 2004.

[3] O. Giering, O. Kozinowski, H. Seybold: *Konstruktive Ingenieurgeometrie*. Hanser, München, 1976.

[4] J. Hoschek, G. Spreitzer: *Aufgaben zur Darstellenden Geometrie*. BI, Zürich, 1974.

[5] W.-D. Klix: *Konstruktive Geometrie, darstellend und analytisch*. Fachbuchverlag, Leipzig, 2001.

[6] C. Leopold: *Geometrische Grundlagen der Architektendarstellung*, 2. Aufl. Kohlhammer, Stuttgart, 2005.

[7] E. Müller, E. Kruppa: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 6. Aufl. Springer, Berlin, 1961.

[8] F. Rehbock: *Darstellende Geometrie*, 3. Aufl. Springer, Berlin, 1969.

[9] F. Rehbock: *Geometrische Perspektive*, 2. Aufl. Springer, Berlin, 1980.

[10] F. Reutter: *Darstellende Geometrie* 1, 12. Aufl. G. Braun, Karlsruhe, 1979.

[11] R. Reutter: *Darstellende Geometrie* 2, 5. Aufl. G. Braun, Karlsruhe, 1976.

[12] E. Schörner: *Darstellende Geometrie*, 3. Aufl. Hanser, München, 1977.

[13] E. Stiefel: *Lehrbuch der darstellenden Geometrie*, 3. Aufl. Birkhäuser, Basel, 1971.

[14] K. Strubecker: *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*, 2. Aufl. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1967.

[15] W. Wunderlich: *Darstellende Geometrie I*. BI, Mannheim, 1966.

[16] W. Wunderlich: *Darstellende Geometrie II*. BI, Mannheim, 1967.