

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lie-Algebren

Blatt 6

Abgabe am 31. Januar in der Vorlesung
Termin der sechsten Übung: 03. Februar

1. Sei L eine Lie-Algebra, I ein Ideal in L und κ die Killing-Form von L . Zeigen Sie:

- a) κ ist assoziativ,
b) der zu I orthogonale Raum I^\perp , definiert durch

$$I^\perp = \{x \in L \mid \kappa(x, y) = 0 \text{ für alle } y \in I\},$$

ist ein Ideal in L .

2. Sei L eine nilpotente Lie-Algebra über einem Körper F . Zeigen Sie, dass die Killing-Form von L konstant 0 ist.
3. Berechnen Sie die Killing-Form für die Lie-Algebra $\mathfrak{b}(2, \mathbb{R})$ der oberen 2×2 -Dreiecksmatrizen über \mathbb{R} und $\mathfrak{n}(3, \mathbb{R})$ der strikten, oberen 3×3 -Dreiecksmatrizen über \mathbb{R} . Welche der Cartanschen Kriterien sind jeweils erfüllt, welche nicht?
4. Sei δ eine Derivation einer Lie-Algebra L . Zeigen Sie, dass für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $x, y \in L$ der Zusammenhang

$$(\delta - (\lambda + \mu)1_L)^n[x, y] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(\delta - \lambda 1_L)^k x, (\delta - \mu 1_L)^{n-k} y]$$

gilt.