Wintersemester 2010/2011
Vorlesung: Mo 09:45-11:15 — Prof. Dr. B. Eick
Übung: Do 09:45-11:15 (zweiwöchentlich) — M. Neumann-Brosig

Übungsaufgaben zur Vorlesung Lie-Algebren

Blatt 5

Abgabe am 17. Januar in der Vorlesung
Termin der fünften Übung: 20. Januar

1. Berechnen Sie für die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra $\mathbf{sl}(2,\mathbb{C})$ mit Basis (h,e,f), gegeben durch

$$h := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; e := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; f := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

jene Matritzen, welche die Abbildungen $ad(h), ad(e)$ und $ad(f)$ repräsentieren.

2. Sei L eine endlich-dimensionale Lie-Algebra. Zeigen Sie, dass durch die adjungierte Darstellung auf L eine L-Modul-Struktur induziert wird. Beweisen Sie dann, dass die Untermoduln von L als L-Modul genau den Idealen von L als Lie-Algebra entsprechen.

3. Sei V ein L-Modul für eine Lie-Algebra L. Zeigen Sie:

   a) Der Dualraum V^* wird mit

   $$\forall x \in L, \sigma \in V^*, v \in V: \quad (x\sigma)(v) := -\sigma(xv)$$

   zu einem L-Modul.

   b) Die adjungierte Darstellung von $(\mathbb{R}^3, \times)$(vgl. Blatt 1) ist selbstdual. Dabei heißt ein L-Modul M selbstdual, wenn es isomorph zu seinem eigenen Dualraum M^*, aufgefasst als L-Modul, ist.

4. Die Witt-Algebra $W(1)$ über dem Körper $\mathbb{F}_p$ ist definiert als p-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum mit Basis $(e_{-1}, ..., e_{p-2})$ und den Strukturkonstanten gegeben durch

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j} & \text{falls } -1 \leq i+j \leq p-2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weisen Sie nach:

   a) Die Jakobi-Identität ist erfüllt, d.h. die obige Definition liefert tatsächlich eine Lie-Algebra.

   b) Die Witt-Algebra ist isomorph zur Lie-Algebra der Derivationen $Der_{\mathbb{F}_p}(\mathbb{F}_p[x]/x^p)$.